

YENİ

FONKSİYONLAR

Adımlama Tekniğiyle Hazırlanmış,
Özgün Sorularla Donatılmış,
Kapsamlı, Konu Anlatımlı Soru Bankası

YENİ MÜFREDATA UYGUN

FATİH İHTİYAROĞLU
BARIŞ ŞAHBAZ



İÇİNDEKİLER

FONKSİYONLAR-I

FONKSİYONLAR-II

MARATON TESTLERİ



FONKSİYONLAR-I

A) Fonksiyon Tanımı

B) Grafik Yardımıyla Tanım ve Görüntü Kümesini Bulma

C) Fonksiyonlarda İşlemler

D) Fonksiyon Çeşitleri

E) Bir Fonksiyonun Tersi

F) Fonksiyonlarda Bileşke

G) Fonksiyon Grafikleri

ADIM



FONKSİYONLAR

A ve B boş olmayan iki küme olmak üzere A nın her elemanını B nin yalnız bir elemanına eşleyen ilişkiye (bağıntıya) **"A dan B ye fonksiyon"** denir.

f, A kümesinden B kümesine tanımlı bir fonksiyon ise kısaca şu şekilde gösterilir;

$f: A \to B$

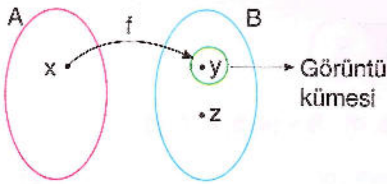
Bu gösterimde A fonksiyonun **"TANIM KÜMESİ"** B de **"DEĞER KÜMESİ"** olarak adlandırılır.

Tanım kümesindeki (A) elemanların değer kümesinde (B) eşleştiği elemanlardan oluşan kümeye kümeye de **"GÖRÜNTÜ KÜMESİ"** denir.

Yukarıda ifade ettiklerimizi bir de şema üzerinde bir örnekle gösterelim.

ÖRNEK 1

A = {x} , B = {y, z} kümeleri verilsin. f, A dan B ye bir fonksiyon olsun.



Yukarıdaki örnekte f fonksiyonu A daki x elemanını alıp B kümesindeki y elemanına götürmektedir.

Bu işlem f(x) = y biçiminde gösterilir.

Burada görüntü kümesine biraz dikkat çekelim. Görüntü kümesi A daki tüm elemanların B de eşleştiği elemanlarla oluşan kümedir ve f(A) ile gösterilir.

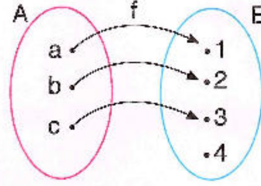
Verdiğimiz örnekte görüntü kümesi {y} şeklinde bir elemandan oluşmaktadır.

DİKKAT !

Görüntü kümesini kapsayan her küme değer kümesi olarak adlandırılabilir.

Buraya kadar anlattıklarımızı pekiştirecek bir örnek daha verelim.

ÖRNEK 2



Yukarıda şema ile gösterilen f fonksiyonunun

Tanım kümesi: A = {a, b, c}

Değer kümesi: B = {1, 2, 3, 4}

Görüntü kümesi: f(A) = {1, 2, 3}

Şimdi iki küme arasındaki ilişkinin fonksiyon olarak adlandırılabilmesi için şartları sıralayalım.

FONKSİYON OLMA ŞARTI

Bir A kümesinden B kümesine tanımlı f in A dan B ye fonksiyon olabilmesi için;

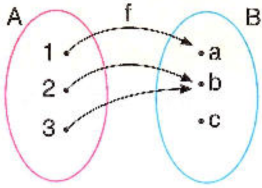
1. Tanım kümesinde (yani A da) eşleşme yapılmayan eleman olmayacak.
2. Tanım kümesinin (A nın) her elemanı değer kümesinin (B nin) yalnız bir elemanı ile eşleşecek.

DİKKAT !

Değer kümesinde (B de) açıkta kalan (eşleşmeyen) eleman bulunabilir.

Şimdi az önce ifade ettiğimiz fonksiyon olma şartını sağlayan ve sağlamayan ilişkilere birkaç örnek gösterelim.

ÖRNEK 1

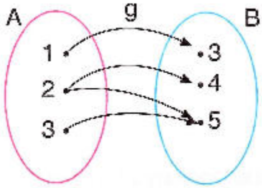


Yukarıdaki şema ile gösterilen f; A dan B ye bir fonksiyon olarak adlandırılabilir. Çünkü A da eşleşme yapmayan hiçbir eleman kalmazken, A nın her elemanı B nin yalnız bir elemanı ile eşleşmiştir. Yani,

$f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = b$

Dolayısıyla f fonksiyonunun görüntü kümesi {a, b} şeklinde olacaktır.

ÖRNEK 2



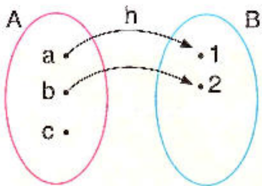
Yukarıda şema ile gösterilen g; A dan B ye bir fonksiyon olamaz.

Çünkü tanım kümesindeki (A daki) 2 elemanın değer kümesinde (B de) iki farklı görüntüsü bulunmaktadır.

$g(2) = 4$, $g(2) = 5$

olması nedeniyle g, A dan B ye bir fonksiyon olamaz. g için A dan B ye bir bağıntıdır, denir.

ÖRNEK 3



Yukarıda şema ile gösterilen h; A dan B ye bir fonksiyon olamaz. Çünkü tanım kümesinde c elemanı eşleşme yapmamış, yani açıkta kalmıştır. Dolayısıyla A dan B ye bir fonksiyon değil bir ilişki (bağıntı) olarak adlandırılır.

FONKSİYON SAYISI

f, A dan B ye tanımlı bir fonksiyon olsun.

A dan B ye yazılabilecek tüm fonksiyonların sayısı pratik olarak şu şekilde hesaplanabilir.

$(s(B))^{s(A)}$

ÖRNEK 4

Boş kümeden farklı n elemanlı bir A kümesi veriliyor.

$f: A \to A$

biçiminde 64n tane f fonksiyonu yazılabildiğine göre, A kümesi kaç elemanlıdır?

Çözüm

A kümesi n elemanlı ise A dan A ya yazılabilecek fonksiyon sayısı n^n dir.

$n^n = 64n \Rightarrow n^n - 64n = 0$

$n(n^{n-1} - 64) = 0$

A kümesi boş kümeden farklı, n = 0 olamaz.

$n^{n-1} = 64 \Rightarrow n = 4$ bulunur.

O halde A kümesi 4 elemanlıdır.

ÖRNEK 5

$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$

kümeleri veriliyor.

$f: A \to B$

biçiminde tanımlı ve her $x \in A$ için f(x) in bir çift sayıya eşit olduğu kaç farklı fonksiyonun yazılabileceğini bulalım.

Çözüm

Her x için f(x) in bir çift sayıya eşit olması isteniyor. B kümesinde 3 tane çift sayı bulunmaktadır. O halde istenen şartı sağlayan, yazılabilecek fonksiyon sayısı:

$3^4 = 81$ tanedir.

ADIM PEKİŞTİRME

ÖRNEK 1

A = {1, 2, 3} , B = {2, 3, 4} kümeleri veriliyor.

f: A → B biçiminde tanımlanan f fonksiyonunun görüntü kümesi kaç farklı biçimde oluşturulabilir?

Çözüm

Görüntü kümesi B kümesinin boş olmayan alt kümelerinden herhangi biri olabilir.

B kümesinin alt küme sayısı $2^3 = 8$ dir. Bu alt kümelerden biri boş olduğuna göre $8 - 1 = 7$ farklı görüntü kümesi oluşturulabilir.

ÖRNEK 2

A = {1, 2, 3} , B = {2, 3, 4} kümeleri veriliyor.

Her x ∈ A için f(x) ≠ x şartını sağlayan A dan B ye kaç farklı f fonksiyonu yazılabilir?

Çözüm

Fonksiyon A kümesinden B kümesine tanımlanıyor.

f(x) ≠ x olacağından A daki her eleman B kümesinde kendisinden farklı bir elemanla eşleşmeli.

Örneğin;

f(1) = 2 , f(2) = 3 , f(3) = 2 veya

f(1) = 4 , f(2) = 3 , f(3) = 2 gibi.

- A kümesindeki 1 elemanı B deki 3 elemandan biri ile eşleşebilir.

  Yani 1 için 3 farklı durum vardır.

- A daki 2 elemanı B deki 3 ve 4 elemanlarından biri ile eşleşebilir.

  Yani 2 için 2 farklı durum vardır.

- A daki 3 elemanı B deki 2 ve 4 elemanlarından biri ile eşleşebilir.

  Yani 3 için 2 farklı durum vardır.

O halde f(x) ≠ x şartını sağlayacak f fonksiyonları

1 için		2 için		3 için
↓		↓		↓
3	.	2	.	2

durum olduğundan yazılabilecek fonksiyon sayısı her bir elemanın durum sayıları çarpımı kadardır. Yani 3.2.2 = 12 farklı fonksiyon yazılabilir.

ÖRNEK 3

A = {1, 2, 3} kümesi veriliyor.

f: A → B biçiminde tanımlanabilecek f fonksiyonlarının sayısı 64 olduğuna göre, B kümesinin eleman sayısı kaçtır?

Çözüm

A dan B ye tanımlanan fonksiyon sayısı $(s(B))^{s(A)}$ ile hesaplanır.

A kümesinin eleman sayısı 3 ve A dan B ye yazılabilecek fonksiyon sayısı 64 olduğundan $(s(B))^3 = 64$ ise s(B) = 4 olarak bulunur.

ÖRNEK 4

A = {1, 2, 3, 4} kümesi veriliyor.

f: A → A olmak üzere,

Her x ∈ A için f(x) + x < 6

koşuluna uyan kaç farklı f fonksiyonu yazılabilir?

Çözüm

Her x ∈ A için

f(x) + x < 6 ⇒ f(x) < 6 − x olmalıdır.

x = 1 için f(1) < 5 olacağından

f(1) = 1 , f(1) = 2 , f(1) = 3 veya f(1) = 4 olabilir. Yani x = 1 için f(1), 4 farklı değer alabilir.

x = 2 için f(2) < 4 olacağından

f(2) = 1 , f(2) = 2 veya f(2) = 3 olabilir. Yani x = 2 için f(2), 3 farklı değer alabilir.

$x = 3$ için $f(3) < 5$ olacağından

$f(3) = 1$ veya $f(3) = 2$ olabilir. Yani $x = 3$ için $f(3)$, 2 farklı değer alabilir.

$x = 4$ için $f(4) < 5$ olacağından

$f(4) = 1$ olabilir. Yani $x = 4$ için $f(4)$, 1 farklı değer alabilir.

Buna göre, tanım kümesinin elemanları

1 için	2 için	3 için	4 için
↓	↓	↓	↓
4 .	3 .	2 .	1

durum olduğundan yazılabilecek fonksiyon sayısı her bir elemanın durum sayıları çarpımı kadardır.

Yani $4.3.2.1 = 24$ farklı fonksiyon yazılabilir.

ÖRNEK 5

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesi veriliyor.

f: A ⟶ A biçiminde tanımlanan f fonksiyonunun görüntü kümesi 2 elemanlı olduğuna göre, bu şartı sağlayan kaç farklı f fonksiyonu yazılabilir?

Çözüm

Oluşturulacak f fonksiyonunun görüntü kümesinin 2 elemanlı olması isteniyor. Bu 2 eleman fonksiyonun değer kümesi içerisinden yani A kümesinden seçilmelidir. Sonra tanım kümesinin elemanları bu seçilen 2 elemandan herhangi biri ile eşleştirilerek istenen fonksiyon oluşturulur.

O halde öncelikle görüntü kümesinin 2 elemanını belirleyelim.

A kümesinde 4 eleman bulunduğundan görüntü kümesi $\binom{4}{2} = 6$ farklı biçimde oluşturulabilir.

Tanım kümesinin 4 elemanının seçilen 2 elemana dağıtılması

$2^4 = 16$ farklı biçimde olur.

Buna göre, tanım kümesinin elemanlarının değer kümesinden 2 eleman seçilip dağıtılması işlemi

$\binom{4}{2} \cdot 2^4 = 6 \cdot 16 = 96$ farklı biçimde olur.

Ancak bu dağıtım sonucunda tanım kümesindeki elemanların hepsinin aynı elemana gitmesi durumunda görüntü kümesi 2 elemanlı olmaz. Bu durum az önce elde edilen genel durumdan çıkarılmalıdır.

İstenmeyen durum sayısı:

$\binom{4}{2} \cdot 2 = 12$ tanedir.

Buna göre, yazılabilecek görüntü kümesi 2 elemanlı olan fonksiyon sayısı

$96 - 12 = 84$

olarak bulunur.

ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

1. A = {a, b, c} kümesi veriliyor.

Buna göre, A dan A ya kaç farklı fonksiyon yazılabilir?

A) 81 B) 48 C) 27 D) 18 E) 9

2. A = {a, b, c} ve B = {1, 2, 3, 4} kümeleri veriliyor.

Buna göre aşağıdaki α ile ilgili eşitliklerden hangisi A dan B ye bir fonksiyon belirtir?

A) $\alpha = \{(a, 1), (b, 2), (a, c)\}$

B) $\alpha = \{(a, 1), (b, 1)\}$

C) $\alpha = \{(a, 4), (b, 3), (2, c)\}$

D) $\alpha = \{(a, 2), (b, 3), (c, 2)\}$

E) $\alpha = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3), (b, 4)\}$

3. Gerçek sayılar kümesinde tanımlı

$\beta_1 = \{(x, y) : x + y = 1\}$

$\beta_2 = \{(x, y) : x + |y| = 1\}$

$\beta_3 = \{(x, y) : x^2 + y = 1\}$

ilişkilerden hangileri bir fonksiyon belirtir?

A) Yalnız β_1 B) Yalnız β_3 C) β_1 ve β_2

D) β_1 ve β_3 E) β_1, β_2 ve β_3

1) C	2) D	3) D

4. R, gerçek sayı kümesini göstermektedir.

A = {1, 2, 3, 4} olduğuna göre,

I. $g : A \to R$ $g(x) = \frac{x}{x-2}$

II. $h : A \to R$ $h(x) = \sqrt{4-x}$

III. $r : A \to R$ $r(x) = |x-1|$

ilişkilerinden hangileri bir fonksiyon belirtir?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III

D) II ve III E) I, II ve III

5. A = {a, b, c} ve B = {1, 2, 3, 4} kümeleri veriliyor.

$f : A \to B$

biçiminde bir f fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, f(a) = 1 şartını sağlayan kaç farklı f fonksiyonu yazılabilir?

A) 18 B) 16 C) 12 D) 12 E) 6

6. A = {a, b, c} kümesi veriliyor.

f: A → A biçiminde görüntü kümesi en çok iki elemanlı olan f fonksiyonları yazılacaktır.

Bu koşula uyan kaç farklı f fonksiyonu yazılabilir?

A) 18 B) 21 C) 27 D) 30 E) 33

4) D	5) B	6) B

7. $A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümeleri veriliyor.

f: A → B olmak üzere,

Her $x \in A$ için

$f(2) = 5$ ve $f(x) \neq x$

şartını sağlayan kaç farklı f fonksiyonu tanımlanabilir?

A) 25 B) 24 C) 20 D) 16 E) 15

8. $A = \{a, b, c, d\}$ kümesi veriliyor.

Buna göre f: A → A biçiminde tanımlanan fonksiyonların kaçında c, görüntü kümesinin bir elemanı değildir?

A) 81 B) 27 C) 24 D) 18 E) 8

9. $A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ kümeleri veriliyor.

f: A → B olmak üzere,

Her $x \in A$ için

$x + f(x) \geq 6$

koşulunu sağlayan kaç farklı f fonksiyonu yazılabilir?

A) 12 B) 15 C) 20 D) 24 E) 27

7) D 8) A 9) D

10. Reel sayılar kümesi üzerinde tanımlı bir f fonksiyonu her x reel sayısı için $f(x + 1) > f(x)$ eşitliğini sağlamaktadır.

Buna göre,

I. $f(3) > f(1)$

II. $f^2(5) > f(4).f(3)$

III. $f(5) + f(4) > 2.f(3)$

ifadelerinden hangileri daima doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız III C) I ve II D) I ve III E) I, II ve III

11. $A = \{1, 2, 3\}$ kümesi veriliyor.

f: A → A olmak üzere,

Her $x \in A$ için

$f(x) + f(4 - x) \geq 4$

koşulunu sağlayan kaç farklı f fonksiyonu yazılabilir?

A) 4 B) 8 C) 12 D) 15 E) 18

12. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ve $B = \{0, 2, 3\}$ kümeleri veriliyor.

f: A → B olmak üzere,

Her $x \in A$ için

$f(x) < x$

koşulunu sağlayan kaç farklı f fonksiyonu yazılabilir?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 12

10) D 11) C 12) C

APOEMİ

ADIM

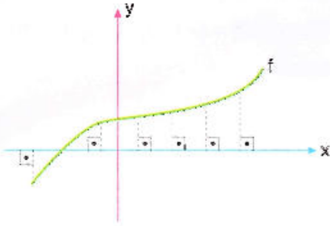


FONKSİYON GRAFİĞİNİN YARDIMIYLA TANIM VE GÖRÜNTÜ KÜMESİNİ BULMA

Öncelikle verilen grafiğin bir fonksiyona ait olup olmadığının nasıl inceleceneğini görelim.

Verilen grafiğe tanım kümesindeki her bir eleman için x eksenine dik olacak şekilde doğrular çizilir. Çizilen doğrular grafiği her defasında yalnızca bir noktada kesiyorsa grafik bir fonksiyona aittir. Değilse bir bağıntı grafiğidir.

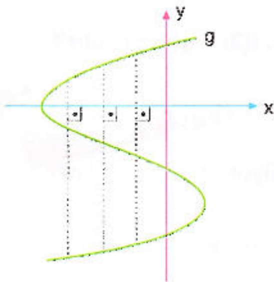
ÖRNEK 1



Yukarıdaki grafikte x ekseninden çizilen dik doğrular grafiği her defasında yalnızca bir noktada kestiğinden grafiği verilen f bir fonksiyondur.

Şimdi aksi bir örnek görelim.

ÖRNEK 2

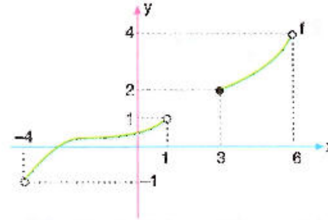


Yukarıdaki g ye ait grafiğe x ekseninden çizilen dik doğrular, grafiği birden fazla noktada kesmektedir. Bu nedenle g fonksiyon değildir.

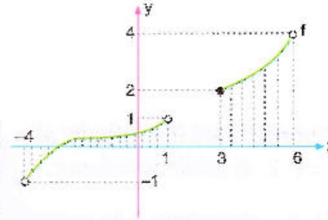
Şimdi bir fonksiyon grafiğine bakarak tanım ve görüntü kümesinin nasıl belirleneceğini öğrenelim.

Bir fonksiyon grafiğinde grafikten x eksenine çizeceğimiz dik doğrular yardımıyla fonksiyonun tanımlı olduğu aralık kolaylıkla belirlenebilir.

ÖRNEK 3



Yukarıda grafiği verilen f fonksiyonunun tanım kümesini grafikten x eksenine dik doğrular çizerek belirleyelim.



Fonksiyon x = –4 ve öncesi ile x = 6 ve sonrası için tanımlı değildir. Ayrıca [1, 3) aralığındaki x değerleri için fonksiyon grafiğinin var olmadığını görüyoruz.

Buna göre f fonksiyonunun tanım kümesi
(–4, 1) ∪ [3, 6) şeklindedir.

Aynı fonksiyonun görüntü kümesini bulabilmek için grafikten y eksenine dik doğrular çizilir. Bu doğruların y ekseninde kestiği noktaların oluşturduğu küme görüntü kümesidir.

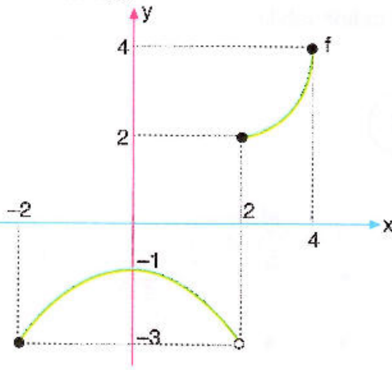


Yukarıda görüldüğü üzere y ekseninde y = –1 ve öncesi ile y = 4 ve sonrası için f fonksiyonu eşleme yapmamıştır. Ayrıca y eksenine [1, 2) aralığındaki değerler için fonksiyonun eşleşmediği görülmektedir.

Buna göre f fonksiyonunun görüntü kümesi
(–1, 1) ∪ [2, 4) şeklindedir.

ADIM PEKİŞTİRME

ÖRNEK 1



Yukarıda grafiği verilen f fonksiyonunun tanım kümesi A, görüntü kümesi B olduğuna göre, A∩B kümesi nedir?

Çözüm

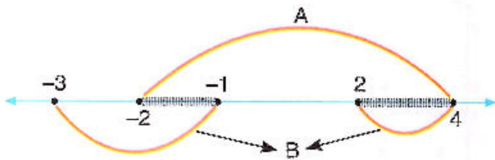
f fonksiyonunun grafiğinden x eksenine dik doğrular çizdiğimizde tanım kümesi A = [–2, 4] şeklinde bulunur.

Burada x = 2 için fonksiyonun y ekseninde 2 ile eşleştiğine dikkat ediniz.

f fonksiyonunun grafiğinden y eksenine dik doğrular çizdiğimizde görüntü kümesi B = [–3, –1] ∪ [2, 4] şeklinde bulunur.

Burada x = –2 için f fonksiyonunun y ekseninde –3 ile eşleştiğine dikkat ediniz. Bu nedenle –3, B kümesinin bir elemanıdır.

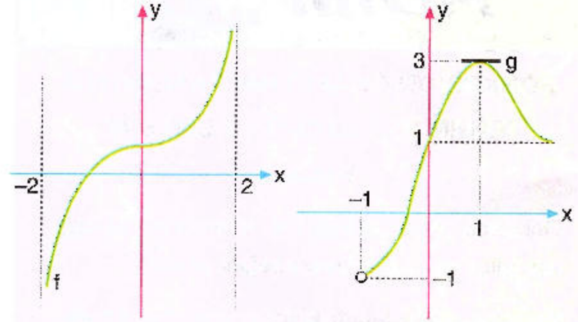
Şimdi A ve B kümelerinin keşimini bulalım.



Yukarıda sayı doğrusu üzerinde A ve B kümelerinin kesişimi gösterilmiştir.

O halde A ∩ B = [–2, –1] ∪ [2, 4] şeklinde bulunur.

ÖRNEK 2



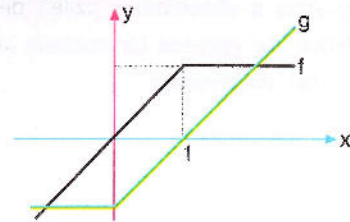
Yukarıda f ve g fonksiyonlarının grafikleri birlikte verilmiştir.

f fonksiyonunun tanım kümesi A, g fonksiyonunun görüntü kümesi B olduğuna göre, A – B fark kümesi nedir?

Çözüm

f fonksiyonunun tanım kümesi A = (–2, 2)
g fonksiyonunun görüntü kümesi B = (–1, 3] olduğundan
A – B = (–2, –1] olarak bulunur.

ÖRNEK 3



Yukarıda grafiği verilen f ve g fonksiyonlarının görüntü kümeleri sırasıyla A ve B dir.

A∩B = [–2, 4] olduğuna göre, f(3) – g(–1) kaçtır?

Çözüm

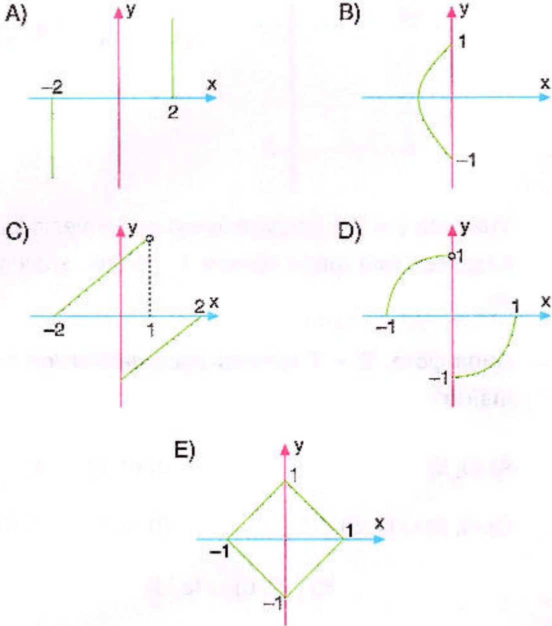
f in görüntü kümesi A nın en büyük elemanı n olsun.
Bu durumda A = (–∞, n] olur.
g nin görüntü kümesi B nın en küçük elemanı k olsun.
Bu durumda B = [k, ∞) olur.

A∩B = [–2, 4] ⇒ n = 4 ve k = –2 olmalıdır.
O halde f(3) = 4 ve g(–1) = –2 bulunur.

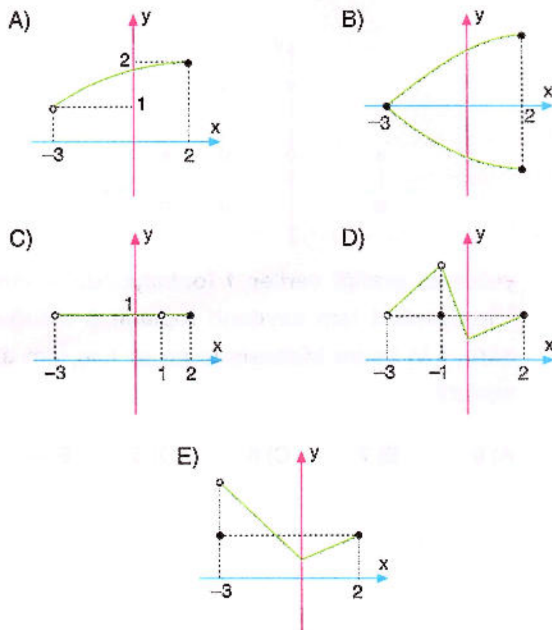
Buna göre, f(3) – g(–1) = 4 – (–2) = 6 bulunur.

ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

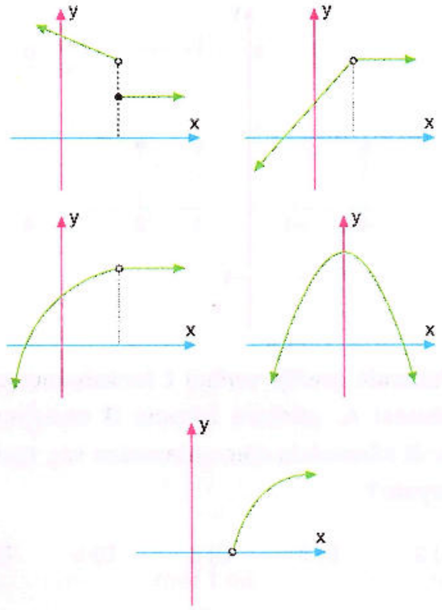
1. Aşağıdaki grafiklerden hangisi y = f(x) biçiminde bir fonksiyona ait olabilir?



2. Aşağıdaki grafiklerden hangisi f: [–3, 2] → R biçiminde tanımlı bir fonksiyona ait olabilir?



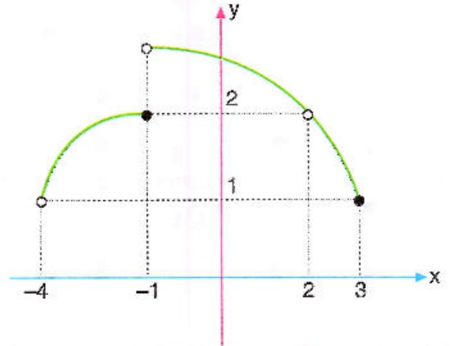
3.



Yukarıdaki grafiklerden kaç tanesi R den R ye tanımlı bir fonksiyonun grafiği olabilir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

4.

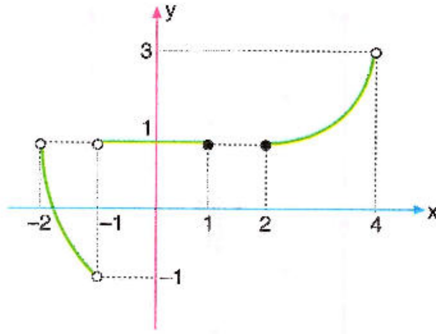


Yukarıda grafiği verilen f fonksiyonunun tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) (–4, 3]
B) (–4, –1] ∪ (2, 3]
C) (–4, 2) ∪ (2,3]
D) (–4, –1) ∪ (–1, 3]
E) [0, 2) ∪ (2, 3)

1) D 2) E 3) B 4) C

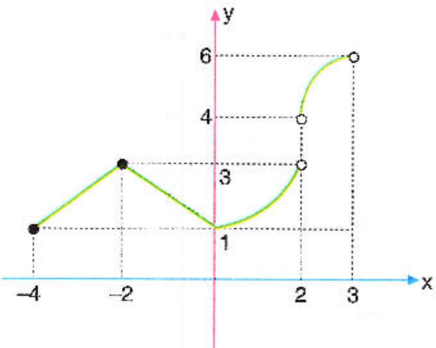
5.



Yukarıda grafiği verilen f fonksiyonunun tanım kümesi A, görüntü kümesi B olduğuna göre, A∩B kümesinin elemanlarından kaç tanesi tamsayıdır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 5

6.



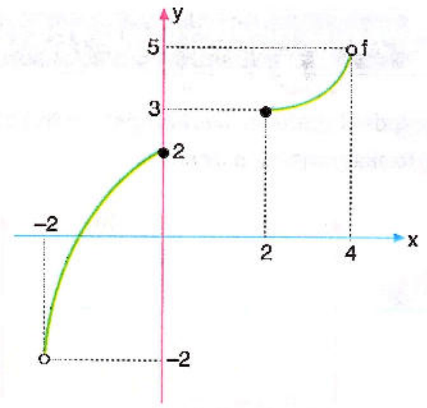
Yukarıda grafiği verilen f fonksiyonunun görüntü kümesi A dır.

A kümesindeki tamsayı değerlerinin oluşturduğu küme B olduğuna göre, B den B ye kaç farklı fonksiyon tanımlanabilir?

A) 2^2 B) 3^3 C) 4^4 D) 5^5 E) 6^6

5) B 6) C

7.



Yukarıda y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir. f fonksiyonunun tanım kümesi T, görüntü kümesi G dir.

Buna göre, G – T kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

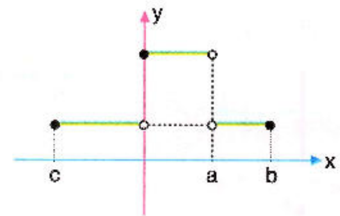
A) (0, 5) B) (0, 2) ∪ {4}

C) (0, 2) ∪ [4, 5) D) (0, 2) ∪ (4, 5)

E) (–2, 0) ∪ (2, 4)



8. a, b, ve c birer tam sayı olmak üzere,



yukarıda grafiği verilen f fonksiyonunun tanım kümesindeki tam sayıların toplamı 5 olduğuna göre, f in tanım kümesinde en az kaç tam sayı vardır?

A) 9 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

7) C 8) C

ADIM



FONKSİYONLARDA DEĞER BULMA

Bir fonksiyonun nasıl çalıştığına dair bir kural verilmişse tanım kümesinin elemanları bu kuralda değişkenin yerine yazılarak fonksiyonun görüntü kümesinin elemanları elde edilir.

Örneğin:

$f : \{1, 2, 3\} \rightarrow R$ biçiminde tanımlanan f fonksiyonunun kuralı $f(x) = x^2 + 1$ biçiminde verilmiş olsun.

Bu kural yardımıyla görüntü kümesinin elemanlarını bulalım.

$x = 1$ için $f(1) = 1^2 + 1 = 2$

$x = 2$ için $f(2) = 2^2 + 1 = 5$

$x = 3$ için $f(3) = 3^2 + 1 = 10$

Böylece görüntü kümesi $\{2, 5, 10\}$ şeklinde bulunur.

ADIM PEKİŞTİRME

ÖRNEK 1

$f(x) = \frac{ax+b}{2}$

$f(0) = 2$

$f(b) = 4$

olduğuna göre, a + b toplamı kaçtır?

Çözüm

Öncelikle $f(0) = 2$ bilgisini kullanalım.

$f(0) = \frac{0+b}{2} \Rightarrow \frac{b}{2} = 2 \Rightarrow b = 4$

$f(b) = 4 \Rightarrow f(4) = 4$ olur.

$f(4) = \frac{a.4+4}{2} = 4 \Rightarrow 4a + 4 = 8 \Rightarrow a = 1$ bulunur.

Buna göre, $a + b = 1 + 4 = 5$ olur.

ÖRNEK 2

$f(x + 1) = mx - 6$ fonksiyonu veriliyor.

$f(m) = 0$ olduğuna göre, m nin alabileceği en büyük değer kaçtır?

Çözüm

$f(m) = 0$ bilgisini $f(x + 1) = mx - 6$ eşitliğinde kullanalım.

Bunun için $x + 1 = m$ eşitliği yazılırsa $x = m - 1$ olur.

Bu durumda f kuralında x yerine $m - 1$ yazarsak

$f(m-1+1) = m(m-1) - 6 = 0$

$m^2 - m - 6 = 0$

$(m-3)(m+2) = 0$

Bu eşitlikten $m = 3$ ve $m = -2$ bulunur. Buna göre, m nin en büyük değeri 3 tür.

APOEMI

ÖRNEK 3

Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı bir f fonksiyonu

- Her $x \in (0, 10]$ için $f(x) = x^2 - x$
- Her $x \in R$ için $f(x) = f(x + 10)$

özelliklerini sağladığına göre, f(35) değer kaçtır?

Çözüm

f fonksiyonunun x in $(0, 10]$ aralığındaki değerleri için kuralı biliniyor.

Bu kuralı kullanabilmek için $f(x) = f(x + 10)$ eşitliği yardımıyla f(35) in eşit olduğu ifadeleri sıralayalım.

$x = 25$ için $f(25) = f(25 + 10) = f(35)$

$x = 15$ için $f(15) = f(15 + 10) = f(25)$

$x = 5$ için $f(5) = f(5 + 10) = f(15)$

Buna göre, $f(35) = f(25) = f(15) = f(5)$ olur. ...(*)

$5 \in (0, 10]$ olduğundan $f(x) = x^2 - x$

$f(5) = 5^2 - 5 = 20$ bulunur.

Yukarıda verilen (*) eşitliğinde $f(35) = f(5)$ olduğundan $f(35) = 20$ olarak bulunur.

ÖRNEK 4

f fonksiyonu için

$f(1) = 0$

$f(x + 1) = f(x) + x$

olduğuna göre, f(10) + f(11) toplamının değeri kaçtır?

Çözüm

Bu tür sorularda fonksiyonun kuralını açıkça bilemediğimizden verilen eşitliği düzenleyerek istenen değerleri elde etmeye çalışmalıyız.

$f(x + 1) = f(x) + x$

$f(x + 1) - f(x) = x$

Son elde ettiğimiz eşitlikten önce f(10), sonra da f(11) değerini x e değerler verek bulmaya çalışalım.

f(1) = 0 olarak bilindiğinden x yerine öncelikle 1 yazalım.

Sonra sırasıyla 2, 3 ... şeklinde devam edelim. Yani,

x = 1 için $f(2) - f(1) = 1$

x = 2 için $f(3) - f(2) = 2$

x = 3 için $f(4) - f(3) = 3$

⋮

x = 10 için $f(10) - f(9) = 9$

x = 11 için $f(11) - f(10) = 10$

Buraya kadar elde ettiğimiz tüm eşitlikleri taraf tarafa toplarsak

$$\begin{aligned} &\cancel{f(2)} - f(1) = 1 \\ &\cancel{f(3)} - \cancel{f(2)} = 2 \\ &\cancel{f(4)} - \cancel{f(3)} = 3 \\ &\quad\vdots \\ &\cancel{f(10)} - \cancel{f(9)} = 9 \\ + \; &f(11) - \cancel{f(10)} = 10 \\ \hline &f(11) - f(1) = 1 + 2 + ... + 10 \end{aligned}$$

$f(11) - \underbrace{f(1)}_{0} = \frac{10.11}{2} \Rightarrow f(11) = 55$

$f(11) - f(10) = 10 \Rightarrow 55 - f(10) = 10$

$f(10) = 45$ olur.

Buna göre, f(10) + f(11) = 45 + 55 = 100 bulunur.

ÖRNEK 5

f fonksiyonu için

$(x - 2).f(x) + x.f(x + 1) = 2x^3 + 2x - 2$

olduğuna göre, f(4) kaçtır?

Çözüm

Verilen eşitlikte x e değerler vererek f(4) değerine ulaşabiliriz.

Öncelikle x = 2 için f(3) değerini bulalım.

$0 + 2.f(3) = 16 + 4 - 2 \Rightarrow f(3) = 9$ bulunur.

Şimdi x = 3 için f(4) değerini bulalım.

$\underbrace{1.f(3)}_{9} + 3.f(4) = 54 + 6 - 2$

$3.f(4) = 49$

$f(4) = \frac{49}{3}$ bulunur.

APOEMI

ÖRNEK 6

Pozitif tam sayılarda tanımlı f fonksiyonu için

- $f(x + 3) = f(x) + 10$
- $f(3x) = 3f(x)$
- $f(15) = 18$

olduğuna göre, f(11) kaçtır?

Çözüm

Verilenler yardımıyla f(11) e ulaşmaya çalışalım. x tam sayı olduğundan f(11) 1. eşitlik yardımıyla elde edilebilir.

x = 8 için $f(11) = f(8) + 10$

x = 5 için $f(8) = f(5) + 10$

f(5) i bulabilirsek f(11) i de bulunmuş oluruz. f(5) i bulabilmek için soruda verilen 2. eşitliği kullanalım.

$f(15) = 3.f(5) \Rightarrow f(5) = 6$

$f(5) = 6 \Rightarrow f(8) = 16 \Rightarrow f(11) = 26$ bulunur.

ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

1. $f: R \to R$ olmak üzere

$f(10-2x) = 5x + 3$

$f(3a + 2) = 38$

olduğuna göre, a kaçtır?

A) –4 B) –2 C) 0 D) 5 E) 7

2. $f(3x) = 6x + 2$ olduğuna göre,

$f(x + f(-1)) = ax + a$

eşitliğini sağlayan a sayısı kaçtır?

A) 3 B) 2 C) $\frac{1}{3}$ D) –1 E) $-\frac{3}{2}$

3. $f: R \to R$ olmak üzere,

$f(x) + 2.f(6-x) = x$

olduğuna göre, f(1) kaçtır?

A) –1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

4. $f: R^+ \to R$ olmak üzere

$f\left(\frac{x}{3}\right) = 3 \cdot f\left(\frac{3}{x}\right) - x$

olduğuna göre, f(3) değeri kaçtır?

A) 9 B) 6 C) 4 D) 3 E) $\frac{3}{2}$

1) B 2) B 3) C 4) E

5. Pozitif reel sayılarda tanımlı bir f fonksiyonu için $m \in R$ olmak üzere

$f(x) = \frac{m.x - f(x)}{2x+3}$

eşitliği veriliyor.

f(2) = 2 olduğuna göre, f(1) değeri kaçtır?

A) 2 B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{3}{2}$ D) 1 E) $\frac{1}{2}$

6. $f: R \to R$ olmak üzere,

$f(x + 3) - f(x + 1) = 2x$

$f(1) = 1$

olduğuna göre, f(19) kaçtır?

A) 271 B) 235 C) 181 D) 145 E) 113

7. Pozitif reel sayılarda tanımlı bir f fonksiyonu için

$f(1) = 11$

$f(x + 1) = (x + 1).f(x)$

olduğuna göre, f(10) değeri kaçtır?

A) 9! B) 10! C) 11! D) 12! E) 13!

5) B 6) D 7) C

8. $x \in (1, \infty)$ olmak üzere,

f fonksiyonu

f: x → "Tanım kümesindeki her bir elemanı kendisinden küçük olan asal sayıların toplamına götürüyor."

biçiminde tanımlanmıştır.

Buna göre, f(n) = 17 eşitliğini sağlayan n tam sayılarının toplamı kaçtır?

A) 15 B) 21 C) 27 D) 38 E) 50

9. Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı bir f fonksiyonu;

n pozitif tam sayı olmak üzere, $x \in (n, 2n)$ koşulunu sağlayan x gerçel sayıları için,

$f(x) = x + n$

biçiminde tanımlanıyor.

$f\left(\frac{17}{3}\right) < 10$

olduğuna göre, n nin alabileceği değerler toplamı kaçtır?

A) 4 B) 6 C) 7 D) 12 E) 15

10. $f^2(x) = f(2x) + 2f(x) - 2$

$f(1) = 3$

$f(8) - f(6) = 192$

olduğuna göre, f(6) kaçtır?

A) 96 B) 65 C) 54 D) 36 E) 17

8) D 9) C 10) B

11. Gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı bir f fonksiyonu

Her $x \in [-5, 5]$ için $f(x) = \min\{2x, x + 2\}$

Her $x \in R$ için $f(x + 10) = f(x) + 10$

şartlarını sağladığına göre, f(44) değeri kaçtır?

A) 6 B) 8 C) 44 D) 46 E) 48

12. Reel sayılarda tanımlı bir f fonksiyonu her a ve b reel sayısı için $f(a + b) = f(a) + f(b)$ eşitliğini sağlamaktadır.

f(1) = 2 olduğuna göre, f(18) değeri kaçtır?

A) 18 B) 24 C) 36 D) 48 E) 60

13. Tam sayılarda tanımlı bir f fonksiyonu

Her x çift sayı için $f(x) - f(x - 2) = 1$

Her x tek sayı için $f(x + 1) = f(x)$

olarak tanımlanıyor.

f(5) = 6 olduğuna göre, f(36) kaçtır?

A) 18 B) 20 C) 21 D) 22 E) 23

11) D 12) C 13) C

ADIM



FONKSİYONLARIN BİRBİRİ TÜRÜNDEN YAZILMASI

Bu adımda, verilen bir fonksiyonun kuralı üzerinde değişiklik yapmayı ve bir fonksiyonu diğeri türünden yazmayı öğreneceğiz.

ADIM PEKİŞTİRME

ÖRNEK 1

$f(x + 1) = 3x - 1$ fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, $f(2x - 1)$ fonksiyonu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $2x + 2$ B) $3x - 5$ C) $6x + 1$

D) $6x - 7$ E) $6x + 11$

Çözüm

1. yol

$f(x + 1)$ i kullanarak $f(2x - 1)$ ifadesini elde edebilmek için $x + 1$ ifadesini i $2x - 1$ e eşitlemeliyiz.

Burada işlem yaparken x ler karışmasın diye $x + 1$ ifadesindeki x i, x^* biçiminde gösterelim.

$x^* + 1 = 2x - 1 \Rightarrow x^* = 2x - 2$

Şimdi $f(x + 1)$ fonksiyonunda x gördüğümüz yere $2x - 2$ yazalım.

$f(2x - 2 + 1) = 3.(2x - 2) - 1$

$f(2x - 1) = 6x - 7$ bulunur.

Bu soruyu bir de test tekniğini kullanarak yani şıktan eleme yöntemi ile çözelim.

2. yol

$f(x + 1) = 3x - 1$ eşitliğini örneğin $x = 0$ için inceleyelim.

$f(1) = -1$ durumunu sağlayan şık cevap olacaktır.

$f(1) = -1$ i elde edebilmek için şıklarda ve $f(2x - 1)$ fonksiyonunda x yerine 1 yazalım.

A) $f(1) = 4$ B) $f(1) = -3$ C) $f(1) = 4$

D) $f(1) = -1$ E) $f(1) = 11$

O halde cevap C şıkkıdır.

ÖRNEK 2

$f(x + 1) = x + 2$

ise $f(x)$ in $f(x + 1)$ türünden eşiti nedir?

Çözüm

Öncelikle f(x) i bulalım. Bunun için $f(x + 1)$ fonksiyonunda x yerine $x - 1$ yazalım.

$f(x - 1 + 1) = x - 1 + 2 \Rightarrow f(x) = x + 1$

Şimdi $f(x + 1) = x + 2$ eşitliğinde x i yalnız bırakıp x in $f(x+1)$ türünden eşitini bulalım.

$f(x + 1) = x + 2 \Rightarrow x = f(x + 1) - 2$

Bu elde ettiğimiz x değerini $f(x) = x + 1$ ifadesinde x yerine yazarsak,

$f(x) = f(x + 1) - 2 + 1 \Rightarrow f(x) = f(x + 1) - 1$ elde edilir.

ÖRNEK 3

$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{2x-2}{x+1}$

olduğuna göre, $f\left(\frac{1}{x}\right)$ neye eşittir?

Çözüm

Soruda verilen eşitlik dikkatlice incelenirse f fonksiyonu içine yazılanı çarpmaya göre ters çevirip 2 ile çarpmaktadır.

Yani f fonksiyonunun kuralı

$f(x) = 2 \cdot \frac{1}{x}$ biçimindedir.

O halde aynı işlem $\frac{1}{x}$ için de geçerli olur.

$f\left(\frac{1}{x}\right) = 2 \cdot \left(\frac{x}{1}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = 2x$ bulunur.

ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

1. $f : R \to R$ olmak üzere

$$f\left(\frac{x-4}{2}\right) = 3x - 4$$

olduğuna göre, f(x − 2) in eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2x - 4$ B) $3x + 1$ C) $2x + 3$
D) $6x - 4$ E) $6x - 2$

2. $f : R \to R$ olmak üzere

$f(x - 1) = 3x + 2$ olduğuna göre, $f(2x + 3)$ in $f(x - 1)$ cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $3.f(x - 1) + 2$ B) $2.f(x - 1) + 3$
C) $2.f(x - 1) - 4$ D) $2.f(x - 1) + 10$
E) $3.f(x - 1) - 2$

3. Pozitif reel sayılarda tanımlı bir f fonksiyonu için

$f(x) = 3^{2x-1}$ olduğuna göre, f(3x) in f(x) cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $3.f^2(x)$ B) $6.f^2(x)$ C) $9.f^3(x)$
D) $18.f^3(x)$ E) $27.f^3(x)$

1) D 2) D 3) C

4. Pozitif reel sayılarda tanımlı bir f fonksiyonu için

$$f(x - 3) = \frac{x+1}{x}$$

olduğuna göre, f(2x) in f(x) cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{2.f(x)}{f(x)+1}$ B) $\frac{2.f(x)-4}{3.f(x)-5}$ C) $\frac{3.f(x)+2}{5.f(x)-2}$
D) $\frac{f(x)+5}{2.f(x)-3}$ E) $\frac{5.f(x)-3}{4.f(x)+2}$

5. $f: R^+ \to R^+$ olmak üzere

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} + 5$$

olduğuna göre, f(x) aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x + \frac{1}{x}$ B) $x^2 - 2$ C) $x^2 + 1$
D) $x^2 + 3$ E) $x^2 + 5$

6. $f : R - \{0\} \to R - \{0\}$ olmak üzere

$$f(x) + 3.f\left(\frac{1}{x}\right) = 8x$$

denklemini sağlayan f(x) aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{x} + x$ B) $\frac{2}{x} - x$ C) $\frac{3}{x} + x$
D) $\frac{4}{x} + x$ E) $\frac{3}{x} - x$

4) B 5) D 6) E

APOTEMİ

ADIM



FONKSİYONLARDA İŞLEMLER

Bu adımda fonksiyonlarda dört işlem olarak da adlandırılan işlemlerin nasıl gerçekleştirileceğini göreceğiz.

f ve g gibi iki fonksiyon arasında

$f+g\,,\, f-g\,,\, f.g\,,\, \frac{f}{g}$

şeklinde işlemleri gerçekleştirirken bu iki fonksiyonun tanım kümelerinin kesişimi, yeni fonksiyonun tanım kümesi olarak kullanılır.

Örneğin;

$f:\{1, 2, 3\} \to R$ $\quad f(x) = 2x$

$g:\{-1, 1, 3\} \to R$ $\quad g(x) = x^3$

fonksiyonları verilmiş olsun.

Buna göre, f + g fonksiyonunun görüntü kümesini bulalım.

Öncelikle f ve g fonksiyonlarının tanım kümelerini kesiştirelim.

$\{1, 2, 3\} \cap \{-1, 1, 3\} = \{1, 3\}$

(f + g) fonksiyonunun tanım kümesi {1, 3} olur.

Şimdi f + g fonksiyonunun görüntü kümesini bulalım.

$(f+g)(1) = f(1) + g(1) = 2.1 + 1^3 = 3$

$(f+g)(3) = f(3) + g(3) = 2.3 + 3^3 = 33$

Buna göre, f + g fonksiyonunun görüntü kümesi {3, 33} bulunur.

ADIM PEKİŞTİRME

ÖRNEK 1

$f:[0, 1] \to R$ ve $f(x) = x^2 + x + 1$

$g:[-1, 0] \to R$ ve $g(x) = 2x - 1$

olduğuna göre, 2f – g fonksiyonunun görüntü kümesi nedir?

Çözüm

Öncelikle f ve g fonksiyonlarının tanım kümelerinin kesişimini bulalım. $[0, 1] \cap [-1, 0] = \{0\}$

O halde 2f – g fonksiyonunun tanım kümesi {0} olarak bulunur. Şimdi 2f – g fonksiyonunun görüntü kümesini bulalım.

$(2f - g)(0) = 2f(0) - g(0)$

$= 2.1 - (-1) = 3$

olduğundan görüntü kümesi {3} olarak bulunur.

ÖRNEK 2

$f: R \to R$ ve $f(x) = 2x + 1$

$g: R \to R$ ve $g(x) = x^2 + 1$

olduğuna göre, $\frac{2f}{g}$ fonksiyonu neye eşittir?

Çözüm

Her iki fonksiyonun da tanım kümesi gerçel sayılardır. O halde $\frac{2f}{g}$ fonksiyonu aşağıdaki gibi olur.

$\left(\frac{2f}{g}\right)(x) = \frac{2f(x)}{g(x)} = \frac{2.(2x+1)}{x^2+1}$

$\left(\frac{2f}{g}\right)(x) = \frac{4x+2}{x^2+1}$ olur.

ÖRNEK 3

a ve b tam sayı olmak üzere

f = {(1, b), (2, 6), (3, 4)}

g = {(a, 1), (4, 2), (5, 3)} fonksiyonları veriliyor.

(f.g)(a) = 3 olduğuna göre, b kaçtır?

Çözüm

f.g işleminin soruda gerçekleştirildiği görülüyor. O halde iki fonksiyonun tanım kümelerinin kesişimi var olmalıdır. (f.g)(a) = 3 eşitliğinin gerçekleşebilmesi için a = 1 olmak zorundadır.

O halde

$(f.g)(1) = 3 \Rightarrow f(1).\underbrace{g(1)}_{1} = 3 \Rightarrow f(1) = 3 = b$ bulunur.

ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

1. $f = \{(-2, 1), (-1, 2), (1, 3), (2, 4)\}$

$g = \{(-3, 3), (-1, 5), (2, -2)\}$

fonksiyonları için (f − 3.g)(x) fonksiyonunun görüntü kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{-13, 10\}$ B) $\{-5, 8\}$ C) $\{-5, 10\}$ D) $\{-8, -13, 9\}$ E) $\{-13, 8\}$

2. $f : R \to R,\ f(x) = 5x - 6$

$g : R \to R,\ g(x) = x^2 + 4x - 3$

olduğuna göre, $(g - 2f)(\sqrt{5} + 3)$ değeri kaçtır?

A) $\sqrt{5}$ B) 2 C) 5 D) 8 E) 25

3. $f : (-3, 2] \to R,\ f(x) = x^2 - 1$

$g: (-1, 3) \to R,\ g(x) = x + 1$

olduğuna göre, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ fonksiyonunun görüntü kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-3, 2]$ B) $(-2, 1]$ C) $(-1, 2]$ D) $(0, 3]$ E) $(1, 4)$

1) A 2) C 3) B

4. $f: Z^+ \to R,\ f(x) = x + 4$

$g: (-5, 3] \to R,\ g(x) = 3 - x$

olduğuna göre, (f − g)(x) fonksiyonunun görüntü kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\{1, 3\}$ B) $\{3, 5, 7\}$ C) $\{2, 5, 7\}$ D) $\{1, 5, 8\}$ E) $\{0, 2, 6\}$

5. R den R ye tanımlı f ve g fonksiyonları için

$(f + 2g)(x) = 2x - 7$

$(f - g)(x) = 5x + 2$

olduğuna göre, (f.g)(1) değeri kaçtır?

A) −6 B) −8 C) −12 D) −20 E) −35

6. $f : R^+ \to R,\ f(x) = \sqrt{x}$

$g: R^+ \to R,\ g(x) = x^2 - 13$

olduğuna göre, $\left(\frac{f - 2.g}{f + g}\right)(4)$ değeri kaçtır?

A) −2 B) −1 C) $-\frac{4}{5}$ D) $\frac{2}{5}$ E) 1

4) B 5) C 6) C

ADIM



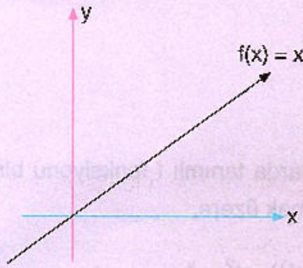
FONKSİYON ÇEŞİTLERİ

Birim Fonksiyon

Tanım kümesindeki her elemanı kendisiyle eşleyen fonksiyona **birim fonksiyon** denir.

Bir başka deyişle f: A → A biçiminde tanımlı f fonksiyonu her x∈A için f(x) = x şeklinde ise f fonksiyonuna **birim fonksiyon** denir.

f : R → R biçimden tanımlanan birim fonksiyonun grafiği aşağıdaki gibidir.



ADIM PEKİŞTİRME

ÖRNEK 1

f birim fonksiyon olmak üzere,

$f(x + 1) = ax^2 + x^2 + bx - x + c$

olduğuna göre, a + b + c toplamı kaçtır?

Çözüm

f birim fonksiyon olduğundan f(x + 1) = x + 1 olmalıdır. Soruda verilen f(x + 1) i düzenleyip x + 1 e eşitlersek;

$$f(x+1) = (a+1).x^2 + (b-1)x + c = x + 1$$

$(a+1).x^2 + (b-1)x + c = x + 1$

Terim terime eşitleme yapılırsa

$$a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$$

$$b - 1 = 1 \Rightarrow b = 2$$

$$c = 1$$

olduğundan a + b + c = –1 + 2 + 1 = 2 bulunur.

ÖRNEK 2

f birim fonksiyon olmak üzere,

$f(a + f(a)) = a^2 - 8$

olduğuna göre, a nın alabileceği en küçük değer kaçtır?

Çözüm

f birim fonksiyon olduğundan f(a) = a dır. Buna göre,

$f(a + f(a)) = f(a + a) = f(2a) = a^2 - 8$

f birim fonksiyon olduğundan f(2a) = 2a dır.

$2a = a^2 - 8 \Rightarrow a^2 - 2a - 8 = 0$

$$\Rightarrow (a-4).(a+2) = 0$$

$$\Rightarrow a = 4 \text{ veya } a = -2$$

olduğundan a nın alabileceği en küçük değer –2 dir.

ÖRNEK 3

A, elemanları pozitif tamsayılar olan 4 elemanlı bir kümedir. f : A → A biçiminde tanımlanan f fonksiyonu birim fonksiyondur.

$f(a) = b + 5$

$f(b) = 2a - 11$

olduğuna göre, A kümesinin elemanlarının toplamı <u>en az</u> kaçtır?

Çözüm

f birim fonksiyon olduğundan

$f(a) = a = b + 5 \quad \Rightarrow \quad -/ \; a - b = 5$

$f(b) = b = 2a - 11 \quad \Rightarrow \quad 2a - b = 11$

$+$ __________

a = 6 bulunur.

$a - b = 5 \Rightarrow 6 - b = 5 \Rightarrow b = 1$ bulunur.

a ve b, A kümesinin iki elemanıdır. A kümesinin elemanları toplamının en küçük olması için diğer iki eleman 2 ve 3 olarak seçilirse A kümesi A = {1, 2, 3, 6} şeklinde olur.

O halde A nın elemanları toplamı en az

1 + 2 + 3 + 6 = 12 bulunur.

ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

1. Reel sayılarda tanımlı f fonksiyonu birim fonksiyon olmak üzere,

$f(x-3)-c+1=(a+2)x^2+(2b-5)x$

olduğuna göre, a + b + c toplamı kaçtır?

A) –3 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

2. Pozitif reel sayılarda tanımlı f fonksiyonu birim fonksiyon ve a, b, c reel sayı olmak üzere,

$f(x-1)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x+3}$

olduğuna göre, f(a + b – c) değeri kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

3. Reel sayılarda tanımlı f fonksiyonu birim fonksiyon ve m, n∈R olmak üzere,

$f(x-2)=(m-2).x+5.f(x+2)-4.f(n)$

olduğuna göre, f(m.n) değeri kaçtır?

A) –15 B) –12 C) –6 D) 9 E) 12

1) B 2) E 3) C

4. $f:R\to R,\quad f(x)=2x+a$

$g:R\to R,\quad g(x)=bx-4$

olmak üzere, (f + g)(x) birim fonksiyon olduğuna göre, a + b toplamı kaçtır?

A) –1 B) 0 C) 2 D) 3 E) 4

5. Reel sayılarda tanımlı f fonksiyonu birim fonksiyon ve t∈R olmak üzere,

$f(3t-f(t+1))=t^2-4$

olduğuna göre, t nin alabileceği <u>en büyük</u> değer kaçtır?

A) –3 B) –1 C) 0 D) 1 E) 3

6. A elemanları pozitif tam sayılar olan bir kümedir.

f: A → A biçiminde tanımlanan f fonksiyonu birim fonksiyondur.

$3\le x+f(x)<12$

koşulunu sağlayan kaç farklı f fonksiyonu yazılabilir?

A) 18 B) 15 C) 12 D) 9 E) 6

4) D 5) E 6) B

ADIM



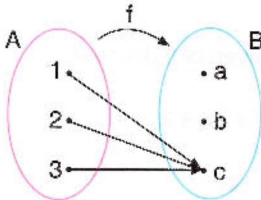
FONKSİYON ÇEŞİTLERİ

Sabit Fonksiyon

f: A → B biçiminde verilen bir f fonksiyonu A kümesinin bütün elemanlarını B kümesinde yalnızca bir elemanla eşliyorsa bu f fonksiyonuna **sabit fonksiyon** denir.

B kümesinin eşleme yapılan elemanını c ile gösterirsek f sabit fonksiyonu f(x) = c şeklindedir.

ÖRNEK 1



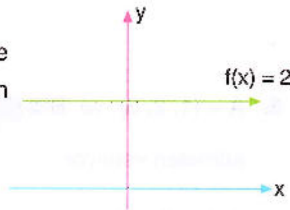
Yukarıdaki şemada gösterilen A dan B ye tanımlı f fonksiyonu sabit fonksiyondur.

DİKKAT !

$f : R \rightarrow R$, f(x) = c biçiminden tanımlanabilen f sabit fonksiyonlarının grafikleri x eksenine paralel doğrulardır.

ÖRNEK 2

$f : R \rightarrow R$, f(x) = 2 biçiminde verilen f sabit fonksiyonunun grafiği yandaki gibidir.



PRATİK

$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ biçiminde verilen bir f fonksiyonu sabit fonksiyon ise

$f(x) = \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ eşitliği geçerlidir.

Sabit Fonksiyon Sayısı

s(A) = n ve s(B) = m olmak üzere,

$f : A \rightarrow B$ biçiminde yazılabilecek f sabit fonksiyonlarının sayısı m tanedir.

ADIM PEKİŞTİRME

ÖRNEK 1

f sabit fonksiyon olmak üzere,

$$f(x) = \frac{2x+a}{4x+a-1}$$

olduğuna göre, a + f(a) toplamı kaçtır?

Çözüm

f sabit fonksiyon olduğundan

$f(x) = \frac{2}{4} = \frac{a}{a-1}$

$\frac{1}{2} = \frac{a}{a-1} \Rightarrow 2a = a-1 \Rightarrow a = -1$ bulunur.

$f(x) = \frac{1}{2}$ olduğundan $f(a) = \frac{1}{2}$ dir.

Buna göre, $a + f(a) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ olur.

ÖRNEK 2

a ≠ b olmak üzere, f(x) = abx + x biçiminde bir f fonksiyonu veriliyor.

f(a) = f(b) olduğuna göre, f(a + b) kaçtır?

Çözüm

$f(a) = a^2b + a$

$f(b) = b^2a + b$

$f(a) = f(b) \Rightarrow a^2b + a = b^2a + b$

$a^2b - b^2a = b - a \Rightarrow ab.(a-b) = b-a$

$\Rightarrow ab = -1$ bulunur.

Buna göre, f(x) = abx + x = −x + x = 0 olur. Yani f sabit fonksiyondur. Dolayısıyla f(a + b) = 0 bulunur.

ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

1. m, n∈R olmak üzere,

$f(x) = (m + 1)x^2 + (m.n - 2)x + m + n$

fonksiyonu sabit fonksiyon olduğuna göre, $f(10^{n-m})$ değeri kaçtır?

A) –3 B) –1 C) 0 D) 2 E) 3

2. $f(x) = \dfrac{-2x^2+6x-8}{ax^2-3x+b}$ fonksiyonu sabit fonksiyon ve

$g(x + 1) = (a - c)x + b - d$ fonksiyonu birim fonksiyon

olduğuna göre, a + b + c + d toplamı kaçtır?

A) 3 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

3. A = {1, 2, 3} ve B = {–2, –1, 0, 1} kümeleri veriliyor.

f, A dan B ye tanımlanmış sabit fonksiyon olduğuna göre, f(1) ≠ 1 şartını sağlayan kaç farklı f fonksiyonu yazılabilir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 6 E) 12

1) A 2) E 3) C

4. f : R – {0} olmak üzere,

$f(x) = x^{n^2+n-1} - n(x - 1) + 1$

fonksiyonu sabit fonksiyon olduğuna göre, f(n) değeri kaçtır?

A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

5. f sabit fonksiyon olmak üzere

$f(a + 2) = a^2 + 2b + 2$

$f(b - 1) = 1 - b^2$

olduğuna göre, f(a) + f(b) toplamının değeri kaçtır?

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

6. A = {1, 2, 3} ve B = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}

kümeleri veriliyor.

A dan B ye tanımlanan bir f fonksiyonu, her x∈A için x < f(x) şartını sağlayan bir sabit fonksiyondur.

Buna göre, bu koşullara uyan kaç farklı f fonksiyonu yazılabilir?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

4) D 5) C 6) B

ADIM



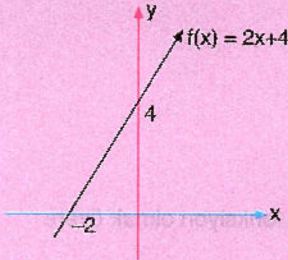
FONKSİYON ÇEŞİTLERİ

Doğrusal Fonksiyon

a ve b gerçel sayı ve $a \neq 0$ olmak üzere

$f: R \rightarrow R$ biçiminde tanımlanan f fonksiyonunun kuralı $f(x) = ax + b$ şeklinde ise f fonksiyonuna **doğrusal fonksiyon** denir.

Örneğin;



$f: R \rightarrow R$, $f(x) = 2x + 4$ fonksiyonun grafiği yukarıdaki gibi bir doğru grafiğidir.

ADIM PEKİŞTİRME

ÖRNEK 1

f gerçel sayılarda tanımlı bir doğrusal fonksiyon olmak üzere,

$f(2) = 2$ ve $f(-1) = 5$

olduğuna göre, f(x) neye eşittir?

Çözüm

f doğrusal olduğundan $f(x) = ax + b$ biçiminde olmalıdır.

$f(2) = 2a + b = 2$ ...(1)

$f(-1) = -a + b = 5$ ...(2)

(1). eşitlikten (2). eşitliği çıkartırsak $3a = -3 \Rightarrow a = -1$

$2a + b = 2 \Rightarrow -2 + b = 2 \Rightarrow b = 4$ bulunur.

Buna göre, $f(x) = -x + 4$ bulunur.

ÖRNEK 2

f doğrusal fonksiyon olmak üzere,

$f(-3) = 7$ ve $f(1) = 5$ olduğuna göre, f(5) kaçtır?

Çözüm

f doğrusal olduğundan değerler arasında sabit bir değişim söz konusudur. Verilen değerlere bakıldığında x değeri 4 artarken f değerinin 2 azaldığı görülmektedir.

$f(-3) = 7 \rightarrow f(1) = 5 \rightarrow f(5) = 3$

↓ +4 ↓ –2 ↓ +4 ↓ –2

şeklinde kolaylıkla $f(5) = 3$ bulunur.

DİKKAT !

Bir doğrusal fonksiyonun değerlerindeki değişim oranı (eğim) bulunabilir.

Yukarıdaki örnekte f in değişim oranı yani eğimi

$$\frac{f(-3) - f(1)}{(-3) - (1)} = \frac{7 - 5}{-4} = -\frac{1}{2} \text{ dir.}$$

ÖRNEK 3

f doğrusal fonksiyon olmak üzere,

$f(f(x)) = 4x + 9$ olduğuna göre, f(2) nin alabileceği <u>en büyük</u> değer kaçtır?

Çözüm

f doğrusal fonksiyon ise $f(x) = ax + b$ biçiminde olmalıdır.

$f(f(x)) = f(ax + b) = 4x + 9$

$f(x) = ax + b$ ifadesinde x yerine $ax + b$ yazılırsa

$f(ax + b) = a.(ax + b) + b = a^2x + ab + b$ olur.

O halde,

$a^2x + ab + b = 4x + 9$ olur. $a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$ veya $a = -2$ dir.

$a = 2$ için $2b + b = 9 \Rightarrow 3b = 9 \Rightarrow b = 3$

$a = -2$ için $-2b + b = 9 \Rightarrow -b = 9 \Rightarrow b = -9$

Bu durumda $f(x) = 2x + 3$ veya $f(x) = -2x - 9$ olabilir.

f(2) nin en büyük değerini aradığımıza göre,

$f(2) = 2.2 + 3 = 7$ bulunur.

ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

1. f doğrusal bir fonksiyondur.

$f(1) = -7$ ve $f(2) = 5$

olduğuna göre, f(3) kaçtır?

A) 7 B) 9 C) 12 D) 17 E) 19

2. f doğrusal bir fonksiyon olmak üzere,

$f(x) + f(2x) + f(3x) = 12x + 6$

olduğuna göre, f(1) kaçtır?

A) 1 B) 3 C) 4 D) 6 E) 9

3. f doğrusal bir fonksiyon olmak üzere,

$f(x + 2) - f(x + 1) = 2$

$f(2x) + f(x + 1) = cx + 4$

olduğuna göre, f(c) kaçtır?

A) 15 B) 13 C) 11 D) 9 E) 7

1) D 2) C 3) B

4. $f(2x - 1) - f(x) = 3x - 3$

olduğuna göre, f(x) aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $f(x) = 2x - 3$ B) $f(x) = 4x - 1$

C) $f(x) = 3x - 1$ D) $f(x) = 5x - 2$

E) $f(x) = -3x$

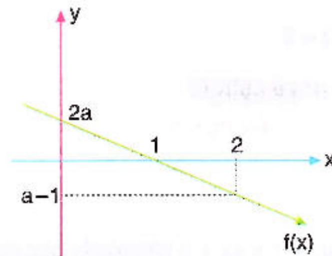
5. f doğrusal fonksiyon olmak üzere

$f(x + f(x)) = 6x + 3$

olduğuna göre, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ **nin alabileceği değerlerin çarpımı kaçtır?**

A) –6 B) –4 C) –3 D) 0 E) 2

6.



Yukarıdaki doğrusal grafik f(x) fonksiyonuna aittir.

Buna göre, f(7) kaçtır?

A) –4 B) –2 C) –1 D) $-\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{2}$

4) C 5) A 6) A

APOTEMİ

ADIM

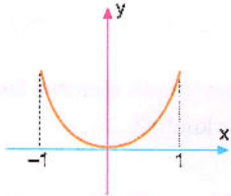


TEK VE ÇİFT FONKSİYONLAR

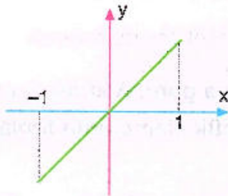
f: A → B biçiminde tanımlı f fonksiyon ise,

- Her x ∈ A için f(x) = f(–x) ise f çift fonksiyon
- Her x ∈ A için f(x) = –f(–x) ise f tek fonksiyon
- * Çift fonksiyonların grafikleri y eksenine göre simetriktir.
- * Tek fonksiyonların grafikleri orijine göre simetriktir.

- f: [–1, 1] → R olmak üzere $f(x) = x^2$ fonksiyonu her x∈[–1, 1] için f(x) = f(–x) eşitliğini sağladığından çift fonksiyondur.
- g: [–1, 1] → R olmak üzere g(x) = x fonksiyonu her x∈[–1, 1] için g(x) = –g(–x) eşitliğini sağladığından tek fonksiyondur.



f çift fonksiyon grafiği y eksenine göre simetriktir.



g tek fonksiyon grafiği orijine göre simetriktir.

DİKKAT !

f: A → B biçiminde tanımlı bir fonksiyon tek ya da çift fonksiyon ise tanım kümesinin (A) elemanları [–x, x] biçiminde bir aralıkta yer alır.

PRATİK

- İki tek fonksiyonun toplamı, farkı tek, çarpımı ise çift fonksiyondur.
- İki çift fonksiyonun toplamı, farkı ve çarpımı çift fonksiyondur.
- f veya g fonksiyonlarından biri çift ise fog ve gof fonksiyonları çifttir.
- f tek fonksiyon ise fof tek fonksiyon, f çift fonksiyon ise fof çift fonksiyondur.

f(x) = 0 sıfır fonksiyon hem tek hem de çift fonksiyondur.

ADIM PEKİŞTİRME

ÖRNEK 1

$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ den R ye tanımlı

I. $f(x) = x.\tan x$

II. $y(x) = x^3 + \sin x$

III. $h(x) = \frac{x}{\cos x}$

fonksiyonlarından hangileri tek fonksiyondur?

Çözüm

I. $f(-x) = (-x)\cdot\tan(-x) = (-x)\cdot(-\tan x)$

$f(-x) = x\cdot\tan x$

f(x) = f(–x) olduğundan f çift fonksiyondur.

II. $g(-x) = (-x)^3 + \sin(-x) = -x^3 - \sin x$

$g(-x) = -(x^3 + \sin x)$

g(x) = –g(–x) olduğundan g tek fonksiyondur.

III. $h(-x) = \frac{-x}{\cos(-x)} = \frac{-x}{\cos x}$

h(x) = –h(–x) olduğundan h tek fonksiyondur.

ÖRNEK 2

f tek, g çift fonksiyondur.

$f(x) = \frac{g(x+1)+x}{x+1}$ ve $f(-2) = 3$

olduğuna göre, g(–3) değeri kaçtır?

Çözüm

f tek fonksiyon olduğundan f(–2) = 3 ⇒ f(2) = –3 olur.

$f(2) = \frac{g(3)+2}{3} = -3$

$g(3) + 2 = -9 \Rightarrow g(3) = -11$ olur.

g çift fonksiyon olduğundan

g(3) = –11 ⇒ g(–3) = –11 bulunur.

ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

1. Aşağıdaki fonksiyonlardan hangisi $(-\pi, \pi)$ aralığında tanımlı bir tek fonksiyondur?

A) tanx B) cotx C) x.sinx D) x + cotx E) –sinx

2. Aşağıdaki fonksiyonlardan kaç tanesi R → R ye tanımlı bir çift fonksiyondur?

I. $f(x) = x.\cos x$
II. $f(x) = x.\sin x$
III. $f(x) = -3$
IV. $f(x) = \cos x + \sin|x|$
V. $f(x) = -x$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

3. f, tek fonksiyon olmak üzere,

$f(x + 2) - f(2 - x) = 2x^3 + 26x$

olduğuna göre, f(4) değeri kaçtır?

A) 68 B) 56 C) 16 D) –36 E) –68

1) E 2) C 3) A

4. f tek, g çift fonksiyon olduğuna göre,

I. (fof)(x) tek fonksiyondur.
II. (fog)(x) çift fonksiyondur.
III. f(x).g(x) çift fonksiyondur.

ifadelerinden hangileri <u>kesinlikle</u> doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III D) I ve II E) I, II ve III

5. f: [2a – 1, a + 4] → A biçiminde tanımlı

$f(x) = x^4 + x^2 + 2$

çift fonksiyonu örtendir.

Buna göre, A kümesinin en büyük elemanı ile en küçük elemanının toplamı kaçtır?

A) 22 B) 38 C) 66 D) 83 E) 94

6. f çift fonksiyon, g tek fonksiyondur.

- $f(4) = 2$
- $3g(-x) + 5.g(x) = 2x^3 + 6x$

olduğuna göre, (fog)(–1) ifadesinin değeri kaçtır?

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

4) D 5) E 6) E

ADIM

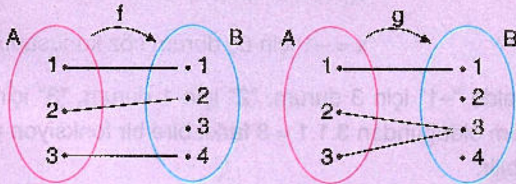


FONKSİYON ÇEŞİTLERİ

Bire Bir Fonksiyon

Bir fonksiyonun tanım kümesindeki her bir elemanın görüntüsü diğer elemanların görüntülerinden farklı ise o fonksiyona **bire bir fonksiyon** denir.

Yukarıda verdiğimiz tanımı şema üzerinde örneklendirelim.

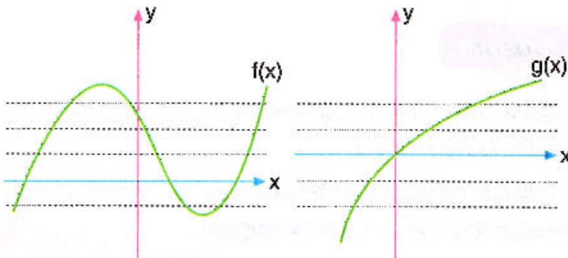


A dan B ye yukarıdaki gibi tanımlı f ve g fonksiyonlarından f bire bir iken, g bire bir değildir.

DİKKAT !

Grafiği verilen bir fonksiyonun bire bir olup olmadığını anlamak için grafiğe x eksenine paralel olacak biçimde doğrular çizilir. Bu doğrular; grafiği sadece bir noktada kesiyorsa fonksiyon bire bir, birden fazla noktada kesiyorsa fonksiyon bire bir değildir.

ÖRNEK 1



Yukarıda grafiği verilen f ve g fonksiyonlarını incelediğimizde f in bire bir olmadığı, g nin ise bire bir olduğu çizilen doğrular sayesinde kolaylıkla görülebilir.

PRATİK

$s(A) = n$ ve $s(B) = m$ olmak üzere,

- $f : A \to A$ biçiminde tanımlanabilecek bire bir fonksiyon sayısı $n!$ dir.
- $f : A \to B$ biçiminde tanımlanabilecek bire bir fonksiyon sayısı $P(m, n) = \frac{m!}{(m-n)!}$ dir.

DİKKAT !

$f: A \to B$ biçiminde tanımlanan f fonksiyonu bire bir ise $s(B) \geq s(A)$ dır.

ADIM PEKİŞTİRME

ÖRNEK 1

R den R ye tanımlı

I. $f(x) = x + 1$

II. $f(x) = x^2 + x + 1$

III. $f(x) = |x| - 1$

fonksiyonlarından hangileri bire birdir?

Çözüm

Fonksiyonların bire bir olup olmadıklarını sırayla inceleyelim.

I. $f(x) = x + 1$ bir doğrusal fonksiyondur. Doğrusal fonksiyonlar ise daima bire birdir.

Örneğin, x_1 ve x_2 gibi birbirinden farklı herhangi iki gerçel sayının f deki görüntülerini bulalım.

$f(x_1) = x_1 + 1$, $f(x_2) = x_2 + 1$ olur.

$x_1 \neq x_2$ iken $f(x_1) \neq f(x_2)$ olacaktır.

Bu nedenle $f(x) = x + 1$ fonksiyonu bire birdir.

II. $f(x) = x^2 + x + 1$ fonksiyonu bire bir değildir.Çünkü, örneğin $f(0) = 1$ ve $f(-1) = 1$ olduğundan bu fonksiyonun bire bir olması söz konusu değildir.

III. $f(x) = |x| - 1$fonksiyonu bire bir değildir. Çünkü, örneğin $f(1) = 0$ ve $f(-1) = 0$ olduğundan bu fonksiyonun bire bir olması söz konusu değildir.

ÖRNEK 2

A = {1, 2, 3} ve B = {a, b, c, d, e} kümeleri veriliyor.

f : A → B biçiminde kaç farklı bire bir f fonksiyonu yazılabilir?

Çözüm

Bu adımda verdiğimiz pratik kuralı kullanarak bire bir fonksiyon sayısını kolayca bulabiliriz.

s(B) = 5 ve s(A) = 3 olduğuna göre, yazılabilecek bire bir fonksiyon sayısı;

$P(5,3) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{120}{2!} = 60$ bulunur.

ÖRNEK 3

A = {1, 2, 3} kümeleri veriliyor.

Her x∈A için f(x) ≠ x

koşuluna uyan f : A → A biçiminde kaç farklı bire bir f fonksiyonu tanımlanabilir?

Çözüm

Fonksiyon bire bir olacak ve tanım kümesindeki her eleman kendisinden farklı bir elemanla eşleşecek. Olabilecek tüm durum aşağıdaki gibidir.

1 → 2 , 2 → 3 , 3 → 1

veya

1 → 3 , 2 → 1 , 3 → 2

O halde soruda istenen f(x) ≠ x koşuluna uyan 2 farklı fonksiyon yazılabilir.

ÖRNEK 4

A = {–1, 2, 3} ve B = {0, 1, 2, 3, 4} kümeleri veriliyor.

Her x∈A için x < f(x)

koşuluna uyan f : A → B biçiminde kaç farklı bire bir f fonksiyonu yazılabilir?

Çözüm

Her x∈A için x < f(x) koşulu sağlanacaksa tanım kümesindeki her bir eleman için durumlar şu şekildedir.

x = 3 için — 3 < f(3) olabilmesi için f(3) = 4 olmalı. O halde x = 3 için tek durum söz konusudur.

x = 2 için — 2 < f(2) olabilmesi için f(2) = 3 olmalı. Burada f(2) = 4 olamaz. Çünkü f(3) = 4 tür ve fonksiyonun bire bir olma şartı bulunmaktadır.

x = –1 için — –1 < f(–1) olabilmesi için f(–1) = 0, f(–1) = 1 ve f(–1) = 2 olmalı.

x = –1 için üç durum söz konusudur.

O halde "–1" için 3 durum, "2" için 1 durum, "3" için 1 durum olduğundan 3.1.1 = 3 farklı bire bir fonksiyon yazılabilir.

ÖRNEK 5

a, b ve c reel sayı olmak üzere,

reel sayılarda tanımlı

$f(x) = ax^2 + bx + c$

fonksiyonunun bire bir olması için,

I. a = 0 , b ≠ 0

II. b = 0

III. a = b = c = 0

koşullarından hangileri sağlanmalıdır?

Çözüm

I. koşul sağlanırsa f doğrusal bir fonksiyon, dolayısıyla bire bir fonksiyon olur.

II. koşulun sağlanması f fonksiyonunun bire bir yapmaz. Örneğin $f(x) = x^2 + 1$ bire bir değildir.

III. koşul sağlanırsa f fonksiyonu sabit fonksiyon olur. Sabit fonksiyonda her eleman aynı değere eşlendiğinden fonksiyon bire bir olamaz.

ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

1. R den R ye tanımlı

I. $f(x) = -x$

II. $f(x) = x^2 + 1$

III. $f(x) = x^3 - 1$

fonksiyonlarından hangileri bire birdir?

A) Yalnız I B) Yalnız III C) I ve II D) I ve III E) I, II ve III

2. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ve $B = \{a, b, c, d, e\}$ kümeleri veriliyor.

$f : A \to B$ biçiminde kaç farklı bire bir f fonksiyonu tanımlanabilir?

A) 144 B) 120 C) 96 D) 60 E) 24

3. $A = \{-3, -1, 0, 1, 2\}$ olmak üzere,

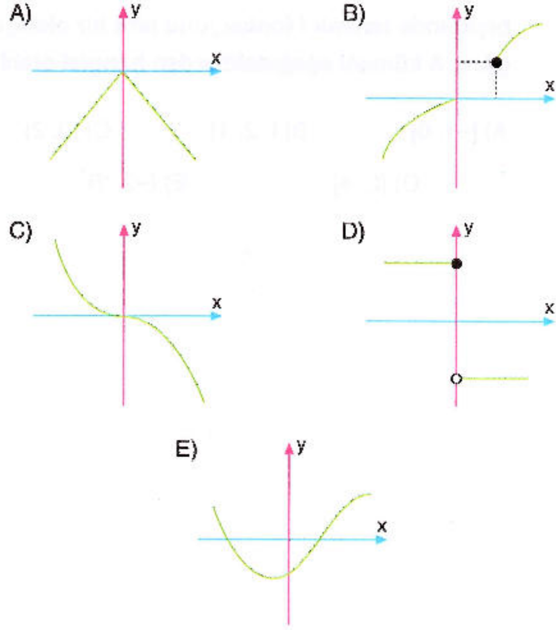
$f : A \to A$ biçiminde tanımlı f fonksiyonu bire birdir.

Buna göre, f(−1).f(1) çarpımının alabileceği en büyük değer kaçtır?

A) 9 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

1) D 2) B 3) C

4. Aşağıdakilerden hangisi R den R ye tanımlı bire bir fonksiyon grafiği olabilir?



5. $A = \{0, 1, 2\}$ ve $B = \{1, 2, 3, 4\}$ kümeleri veriliyor.

Her $x \in A$ için $f(x) > x$ koşuluna uygun $f : A \to B$ biçiminde tanımlı kaç farklı bire bir f fonksiyonu yazılabilir?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

6. 3 elemanlı bir kümeden 5 elemanlı bir kümeye bire bir olmayan kaç farklı fonksiyon tanımlanabilir?

A) 25 B) 60 C) 65 D) 75 E) 95

4) C 5) D 6) C

7. $f : A \to R$ olmak üzere,

$f(x) = |x - 1| + x$

biçiminde tanımlı f fonksiyonu bire bir olduğuna göre, A kümesi aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $[-1, 0]$ B) $[-2, 1]$ C) $[0, 2)$

D) $[2, 4]$ E) $(-2, 2)$

8. A = {a, b, c, d} ve B = {1, 2, 3, 4, 5} kümeleri veriliyor.

$f: A \to B$

biçiminde tanımlı f(a) – f(b) = 1 koşulunu sağlayan kaç farklı bire bir fonksiyon yazılabilir?

A) 48 B) 36 C) 24 D) 18 E) 12

9. A = {1, 2, 3, 4} ve $f : A \to A$ olmak üzere,

Her $x \in A$ için $f(x) \neq x^2$ koşulunu sağlayan kaç farklı bire bir f fonksiyonu yazılabilir?

A) 20 B) 16 C) 14 D) 10 E) 8

7) D 8) C 9) C

10. f ve g, R den R ye tanımlı fonksiyonlar ve

$f(x) = x + 2$ olmak üzere,

f(g(x)) fonksiyonu bire bir olduğuna göre, g(x) fonksiyonu aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $g(x) = x^2 + 1$ B) $g(x) = 1$

C) $g(x) = |x|$ D) $g(x) = \frac{x+1}{x}$

E) $g(x) = \sqrt[3]{x}$

11. Z^+ pozitif tam sayılar kümesini göstermek üzere, f fonksiyonu

- $f: Z^+ \to Z^+$
- $f(x + 1) = \frac{1}{f(x)}$

biçiminde tanımlanıyor.

Buna göre,

I. f bire birdir.

II. f sabit fonksiyondur.

III. $f(x + 1) < f(x)$

ifadelerinden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III

D) I ve III E) I, II ve III

12. A = {1, 2, 3} ve B = {1, 2, 3, 4, 5} olmak üzere,

A dan B ye tanımlı bire bir fonksiyonların kaçında görüntü kümesi A kümesini kapsar?

A) 1 B) 3 C) 6 D) 24 E) 36

10) E 11) B 12) C

ADIM

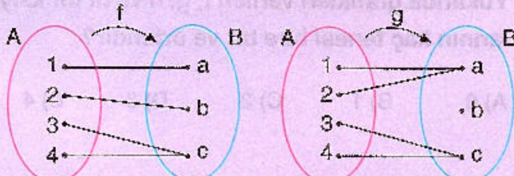


FONKSİYON ÇEŞİTLERİ

Örten Fonksiyon

Bir fonksiyonun görüntü kümesi ile değer kümesi birbirine eşitse bu fonksiyona **örten fonksiyon** denir. $f : A \to B$ biçiminde tanımlanan f fonksiyonu örten ise $f(A) = B$ dir.

Yukarıda verdiğimiz tanımı şema üzerinde örneklendirelim.



A dan B ye yukarıdaki gibi tanımlı f ve g fonksiyonlarından f örten iken, g örten değildir.

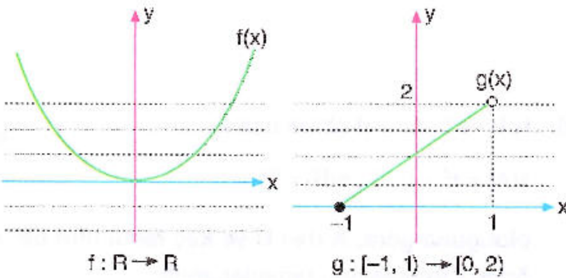
Örneğin;

$A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{2, 4, 6\}$ kümeleri verilsin.

$f : A \to B$ biçiminde tanımlanan $f(x) = 2x$ fonksiyonu örtendir. Çünkü $f(A) = \{2, 4, 6\} = B$ dir.

DİKKAT !

Grafiği verilen bir fonksiyonun örten olup olmadığını anlamak için değer kümesinden seçtiğimiz her y için x eksenine paralel çizilen doğrular grafiği en az bir noktada kesiyorsa fonksiyon örtendir. Değilse fonksiyon örten değildir.



Yukarıda grafiği verilen f ve g fonksiyonlarından f örten değilken g örtendir.

ADIM PEKİŞTİRME

ÖRNEK 1

$s(A) = 2x - 5$ ve $s(B) = x - 1$ olmak üzere,

$f : A \to B$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonu örtendir.

Buna göre, A kümesinin eleman sayısı en az kaçtır?

Çözüm

f fonksiyonu örtense $s(A) \geq s(B)$ olmalıdır.

O halde $2x - 5 \geq x - 1 \Rightarrow x \geq 4$ olur.

$x = 4$ için A kümesinin eleman sayısı en az olur. Yani A kümesinin eleman sayısı en az $2x - 5 = 2.4 - 5 = 3$ bulunur.

ÖRNEK 2

I. $f : R \to R$, $f(x) = x^2 + 1$

II. $g : R \to R$, $g(x) = x$

III. $h : Z \to Z$, $h(x) = 2x + 1$

Yukarıda verilen fonksiyonlardan hangisi örtendir?

Çözüm

I. f fonksiyonu örten değildir.
Çünkü değer kümesindeki (R) örneğin 0, –1, –2, ..., gibi değerlerin hiçbiri tanım kümesindeki elemanlarla eşleşmez. Değer kümesinde eşleşmeyen elemanlar bulunduğundan bu fonksiyon örten değildir.

II. g fonksiyonu örtendir.
Çünkü tanım kümesindeki her eleman değer kümesinde kendisiyle eşleştiği için değer kümesinde açıkta eleman kalmaz.

III. h fonksiyonu örten değildir.
Çünkü değer kümesindeki (Z) 0, 2, 4, 6, ... gibi çift sayılar tanım kümesindeki hiçbir elemanla eşleşmez. Değer kümesinde açıkta eleman kaldığından h örten değildir.

ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

1. $s(A) = x^2 - 9$ ve $s(B) = 6x - 2$ olmak üzere,

$f : A \rightarrow B$ biçiminde tanımlı f fonksiyonu örtendir.

Buna göre, B kümesinin eleman sayısı <u>en az</u> kaçtır?

A) 22 B) 28 C) 34 D) 40 E) 47

2. $f : [-1, 1] \rightarrow [-2, 3]$, $f(x) = 2x$

$g : [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$, $g(x) = x^2$

$h : R \rightarrow R$, $h(x) = x + 2$

$r : Z \rightarrow Z$, $r(x) = 2x + 1$

Yukarıda verilen fonksiyonlardan kaç tanesi örtendir?

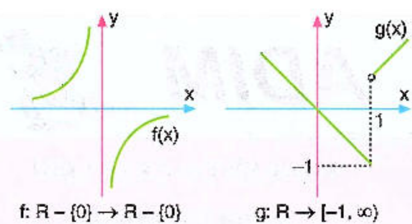
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

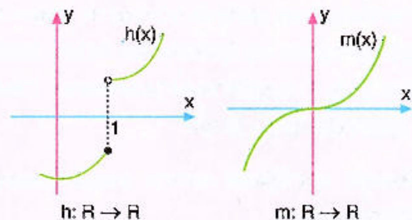
3. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ve $B \subset A$ olmak üzere,

$f : A \rightarrow B$ biçiminde tanımlı f fonksiyonu örten olduğuna göre, kaç farklı B kümesi yazılabilir?

A) 16 B) 15 C) 12 D) 8 E) 4

4.





Yukarıda grafikleri verilen f, g, h ve m fonksiyonlarının kaç tanesi bire bir ve örtendir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

5. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ve $B = \{1, 2, 3\}$ olmak üzere,

$f : A \rightarrow B$ biçiminde tanımlı kaç farklı f örten fonksiyonu yazılabilir?

A) 48 B) 36 C) 30 D) 24 E) 12

6. $t \in R$ ve $f : A \rightarrow B$ olmak üzere,

$s(A) = t^2 - t - 3$, $s(B) = 2t + 1$

olduğuna göre, A dan B ye kaç farklı bire bir ve örten f fonksiyonu tanımlanabilir?

A) 3 B) 9 C) 2^9 D) 9^9 E) 9!

1) D 2) C 3) B 4) C 5) B 6) E

APOTEMİ

ADIM



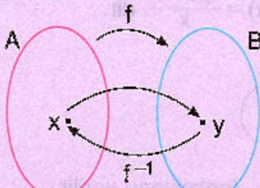
BİR FONKSİYONUN TERSİ

$f : A \to B$, $f(x) = y$ biçiminde verilen f fonksiyonunun tersi f^{-1} ile gösterilir.

$$f^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in f\}$$

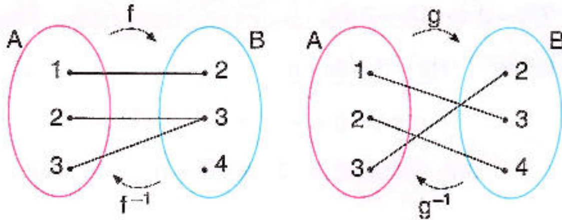
- f fonksiyonu bire bir ve örten değilse f in tersi f^{-1}, B den A ya bir bağıntı olarak adlandırılır.
- f fonksiyonu bire bir ve örten ise f^{-1} de B den A ya bire bir ve örten bir fonksiyondur.

Buna göre, $f : A \to B$, $f(x) = y$ bire bir ve örten bir fonksiyon ise



$$f : A \to B \Leftrightarrow f^{-1} : B \to A$$

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$



Yukarıda verilen f ve g fonksiyonlarından f bire bir ve örten olmadığından tersi f^{-1} fonksiyon değildir.

g ise bire bir ve örten olduğundan tersi g^{-1} fonksiyondur.

g fonksiyonunda $g(1) = 3 \Leftrightarrow g^{-1}(3) = 1$ dir.

DİKKAT !

Kuralı bilinen bir fonksiyonun tersinin kuralını bulma

Kuralı bilinen bir fonksiyonun tersini bulmak için x yalnız bırakılır. x yalnız bırakıldığında elde edilen ifade f^{-1} fonksiyonunun kuralıdır.

ÖRNEK 1

$f(x) = \frac{3x-1}{2}$ **fonksiyonunun tersini bulalım.**

x i yalnız bırakmalıyız. İşlem kolaylığı olması için f(x) yerine y yazalım.

$$y = \frac{3x-1}{2} \Rightarrow 3x - 1 = 2y$$

$$3x = 2y + 1$$

$$x = \frac{2y+1}{3}$$

x i yalnız bıraktık. Elde ettiğimiz $\frac{2y+1}{3}$ ifadesi $f^{-1}(y)$ dir.

Yani $f^{-1}(y) = \frac{2y+1}{3}$ (∗) bulundu.

Fonksiyonlarda değişken olarak genellikle x kullanıldığından biz de son bulduğumuz eşitlikte (∗) y yerine x yazarsak,

$$f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{3}$$

şeklinde fonksiyonun tersinin kuralı bulunur.

PRATİK

$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ biçimindeki fonksiyonların tersi pratik olarak aşağıdaki gibi bulunur.

$$f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$$

ÖRNEK 2

$f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$ fonksiyonunun tersi $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{x-2}$ dir.

PRATİK

$f(x) = ax^2 + bx + c$

biçiminde ikinci dereceden fonksiyonların tersi bulunurken $ax^2 + bx + c$ ifadesi tam kare biçiminde yazılır. Buradan x yalnız bırakılarak fonksiyonun tersi elde edilir.

ÖRNEK 3

$x < -2$ olmak üzere,

$f(x) = x^2 + 4x + 5$ **fonksiyonunun tersini bulalım.**

Öncelikle $x^2 + 4x + 5$ ifadesini tam kare biçiminde yazmalıyız.

$$x^2 + 4x + 5 = x^2 + 4x + 4 + 1 = (x+2)^2 + 1$$

O halde

$$f(x) = y = (x+2)^2 + 1$$
$$y - 1 = (x+2)^2$$

Her iki tarafın karekökü alınırsa

$$\sqrt{y-1} = \sqrt{(x+2)^2}$$
$$\sqrt{y-1} = |x+2|$$

Soruda $x < -2$ bilgisi verilmişti. Buna göre, $x + 2$ negatif işaretli olur. Mutlak değer dışına "–" ile çarparak çıkarmalıyız.

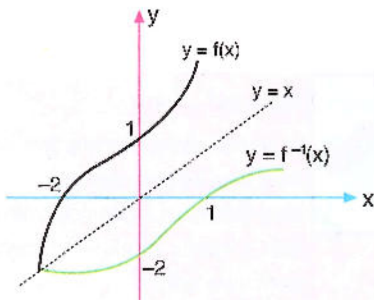
$$\sqrt{y-1} = -x-2 \Rightarrow x = -\sqrt{y-1} - 2$$

Bu durumda $f^{-1}(y) = -\sqrt{y-1} - 2$ olur.

Yani $f^{-1}(x) = -\sqrt{x-1} - 2$ olarak bulunur.

DİKKAT !

Bire bir ve örten bir fonksiyonun grafiği verilmişse tersinin grafiği kolaylıkla çizilebilir. Çünkü fonksiyonun grafiğinin y = x doğrusuna göre simetriği olan grafik ters fonksiyonun grafiği olacaktır.



ADIM PEKİŞTİRME

ÖRNEK 1

$f : R - \{3\} \to R - \{0\}$

$x = \dfrac{3f(x)+1}{f(x)}$ **olduğuna göre, $f^{-1}(x)$ neye eşittir?**

Çözüm

Bir fonksiyonun tersini bulurken x i yalnız bırakıyorduk. Soruda görüldüğü üzere x zaten yalnız bırakılmış.

O halde eşitliğin sağ tarafındaki ifade fonksiyonun tersinin kuralını verecektir.

Buna göre, $f^{-1}(x) = \dfrac{3x+1}{x}$ dir.

ÖRNEK 2

$f(x+1) = 3x + n$ fonksiyonu verilir.

$f^{-1}(2) = 0$ olduğuna göre, n kaçtır?

Çözüm

$f^{-1}(2) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 2$ dir.

O halde; $f(\underbrace{x+1}_{0}) = \underbrace{3x+n}_{2}$

$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

$3.(-1) + n = 2 \Rightarrow -3 + n = 2 \Rightarrow n = 5$ bulunur.

ÖRNEK 3

$f\left(\dfrac{2x+1}{x-3}\right) = x + 1$ **olduğuna göre, f(x) neye eşittir?**

Çözüm

Bu türden sorularda f in içini x yapabilmek için içerideki ifadenin, yani $\dfrac{2x+1}{x-3}$ ifadesinin tersi bulunup soruda x görülen her yere yazılır.

$\dfrac{2x+1}{x-3}$ ifadesinin tersi $\dfrac{3x+1}{x-2}$ dir. O halde,

$$f\left(\dfrac{2\cdot\left(\dfrac{3x+1}{x-2}\right)+1}{\dfrac{3x+1}{x-2}-3}\right) = \dfrac{3x+1}{x-2} + 1 \Rightarrow f(x) = \dfrac{4x-1}{x-2} \text{ dir.}$$

ÖRNEK 4

$f : R - \{2\} \rightarrow R - \{3\}$

$f(x) = \dfrac{ax+1}{bx+2}$ **olduğuna göre, a.b kaçtır?**

Çözüm

Fonksiyonun tanım kümesi R – {2} olarak verilmiş. Burada "2" nin reel sayılar kümesinden çıkartılmış olmasının nedeni fonksiyonun paydasını sıfır yapmasındandır.

O halde $b.2 + 2 = 0 \Rightarrow 2b = -2 \Rightarrow b = -1$ dir.

Fonksiyonun tersinin tanım kümesi R – {3} tür.

Burada da "3" fonksiyonun tersinin paydasını sıfır yaptığından reel sayılar kümesinden çıkartılmıştır.

Fonksiyonun tersini alalım.

$$f(x) = \frac{ax+1}{bx+2}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{-2x+1}{bx-a}$$

f^{-1} de $x = 3$ için payda sıfıra eşittir. Buna göre,

$b.(3) - a = 0$

$(-1).3 - a = 0$

$a = -3$ olur.

O halde $a.b = (-3).(-1) = 3$ bulunur.

ÖRNEK 5

$x < -5$ olmak üzere,

$f(x) = x^2 + 10x$ fonksiyonunun tersi neye eşittir?

Çözüm

Sorudaki gibi 2. dereceden fonksiyonların tersi bulunurken eşitliğin sağ tarafını tam kare şeklinde yazmamız gerektiğini anlatmıştık.

O halde $x^2 + 10x$ ifadesini tam kare yapmak için ifadeye 25 ekleyip 25 çıkartalım.

$x^2 + 10x = x^2 + 10x + 25 - 25$

$= (x+5)^2 - 25$

$f(x) = y = (x+5)^2 - 25$

$y + 25 = (x+5)^2 \Rightarrow \sqrt{y+25} = |x+5|$

Soruda $x < -5$ verildiğinden $x + 5$ negatiftir.

Bu nedenle mutlak değerin dışına "–" ile çarpılarak çıkartılır.

$\sqrt{y+25} = -(x+5)$

$\sqrt{y+25} = -x-5$

$x = -\sqrt{y+25} - 5$

Buna göre, $f^{-1}(x) = -\sqrt{x+25} - 5$ bulunur.

ÖRNEK 6

$f(x) = \dfrac{1+\ln x}{\ln x}$

olduğuna göre, $f^{-1}(x)$ neye eşittir?

Çözüm

Fonksiyonun tersini bulmak için x i yalnız bırakalım.

$f(x) = y = \dfrac{1+\ln x}{\ln x}$

$y.\ln x = 1 + \ln x$

$y.\ln x - \ln x = 1 \Rightarrow \ln x.(y-1) = 1$

$\ln x = \dfrac{1}{y-1}$

$x = e^{\frac{1}{y-1}}$

Buna göre, $f(x) = e^{\frac{1}{x-1}}$ bulunur.

ÖRNEK 7

m pozitif tam sayı ve $f: Z \rightarrow Z$ olmak üzere,

$f(x) = \dfrac{mx}{2} + 1$ fonksiyonunun tersi $f^{-1}(x)$ fonksiyonudur.

Buna göre, $f^{-1}(m)$ kaçtır?

Çözüm

Fonksiyonun tersinin de fonksiyon olabilmesi için bire bir ve örten olması gereklidir. O halde bu soruda verilen fonksiyonun bire bir ve örten olması için $m = 2$ olmalıdır. $m = 2$ dışındaki hiçbir m pozitif tam sayısı f i bire bir ve örten yapmaz. Bu durumda $f(x) = x + 1$ olur.

$f(x) = x + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = x - 1$ bulunur.

$m = 2$ olduğuna göre,

$f^{-1}(m) = f^{-1}(2) = 2 - 1 = 1$ bulunur.

ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

1. f^{-1}, f fonksiyonunun tersi olmak üzere,

$f^{-1}(4x-5) = -x+7$

olduğuna göre, $f^{-1}(3) + f(3)$ toplamı kaçtır?

A) 8 B) 11 C) 15 D) 16 E) 17

2. $f : [4, \infty) \to [0, \infty)$ olmak üzere,

$f(x) = x^2 - 4x$

olduğuna göre, $f^{-1}(5)$ kaçtır?

A) 5 B) 3 C) 2 D) –1 E) –2

3. $f : R - \left\{\frac{5}{4}\right\} \to R - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ olmak üzere,

$x = \frac{5f(x)+3}{4f(x)+2}$

olduğuna göre, $f^{-1}(0) + f(1)$ toplamı kaçtır?

A) –2 B) $-\frac{3}{2}$ C) –1 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{2}$

1) D 2) A 3) D

4. $f : R - \{a\} \to R - \{b\}$ olmak üzere,

$f(x) = \frac{5x-3}{-x+4}$

fonksiyonu bire bir ve örten olduğuna göre, f(a + b) kaçtır?

A) $-\frac{8}{3}$ B) $-\frac{8}{5}$ C) –1 D) 1 E) 2

5. $x > -3$ olmak üzere,

$f(x) = x^2 + 6x + 7$

olduğuna göre, $f^{-1}(x)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\sqrt{x+2}+3$ B) $\sqrt{x+2}-3$

C) $-\sqrt{x+2}-3$ D) $-\sqrt{x+3}+2$

E) $-\sqrt{x+3}-2$

6. A = {–4, –2, 0, 1, 3} kümesi veriliyor.

f:A → A biçiminde tanımlı f fonksiyonunun tersi $f^{-1}(x)$ dir.

Buna göre, $f^{-1}(x).f(x)$ çarpımının alabileceği <u>en büyük</u> değer kaçtır?

A) 16 B) 12 C) 9 D) 4 E) 0

4) B 5) B 6) A

APOTEMI

7. $f : R \to R$ olmak üzere,

$f(x) = 5x - 2$ fonksiyonu veriliyor.

$A = (-7, 13]$ olduğuna göre, $f^{-1}(A)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $[-37, 63]$ B) $[-37, 63)$ C) $(-1, 3]$

D) $[-1, 3)$ E) $(-5, 12]$

8. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

olduğuna göre, $f^{-1}(2x)$ in $f(x)$ türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $f(x)$ B) $\dfrac{f(x)+1}{f(x)}$ C) $\dfrac{2f(x)-1}{f(x)}$

D) $\dfrac{3f(x)-1}{f(x)}$ E) $\dfrac{3f(x)+1}{f(x)+3}$

9. $f : Z \to Z$

$f(x) = (4a - 7)x + 2a$

fonksiyonunun tersi de bir fonksiyon olduğuna göre, a nın alabileceği değerler çarpımı kaçtır?

A) −2 B) 0 C) 2 D) 3 E) 5

7) C 8) E 9) D

10. $f : R - \{1, 3\} \to R - \{2\}$ olmak üzere,

$f^{-1}\left(\dfrac{3x-2}{x-1}\right) = x + 1$

olduğuna göre, $f^{-1}(x)$ neye eşittir?

A) $\dfrac{3x-2}{x-1}$ B) $\dfrac{x-2}{x-3}$ C) $\dfrac{2x-5}{x-3}$

D) $\dfrac{5x-2}{x-3}$ E) $\dfrac{2x+5}{3x-2}$

11. $f(x) = 2 - \sqrt{x+4}$ fonksiyonunun tersi $f^{-1}(x)$ olmak üzere,

$f^{-1}(x+1) < 0$

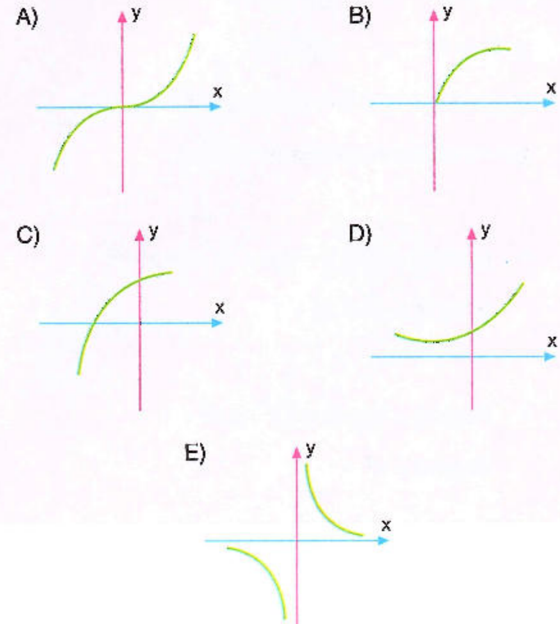
eşitsizliğini sağlayan x değerlerinin yer aldığı aralık aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(0, -2)$ B) $(-2, 2)$ C) $(-1, 1)$

D) $(-1, 3)$ E) $(0, 4)$

12. $f(x) = f^{-1}(x)$

olduğuna göre, f fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?



10) C 11) D 12) E

ADIM



FONKSİYONLARDA BİLEŞKE

A, B, C boş olmayan kümeler olmak üzere,

$f: A \to B,\ f(x) = y$

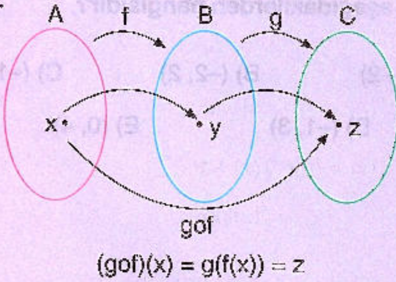
$g: B \to C,\ g(y) = z$

şeklinde f ve g fonksiyonları verilmiş olsun.

$gof: A \to C,\ (gof)(x) = z$

biçiminde f ve g fonksiyonlarını kullanarak A kümesinin elemanlarını C kümesine eşleyen fonksiyona g bileşke f fonksiyonu denir ve gof biçiminde gösterilir.

Yukarıda anlattıklarımızı şema üzerinde gösterelim.



$(gof)(x) = g(f(x)) = z$

Örneğin;

$f: R \to R \quad , \quad f(x) = x + 1$

$g: R \to R \quad , \quad g(x) = x^2$

biçiminde f ve g fonksiyonları verilmiş olsun.

gof ve fog fonksiyonlarını bulalım.

- $(gof)(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = (x + 1)^2$

  $(gof)(x) = x^2 + 2x + 1$

- $(fog)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 1$

  $(fog)(x) = x^2 + 1$

FONKSİYONLARDA BİLEŞKE ÖZELLİKLERİ

I. I birim fonksiyon olmak üzere,

$Iof = foI = f$

II. $fogoh = (fog)oh = fo(goh)$ (Birleşme özelliği)

III. f ve g birbirinden ve birim fonksiyondan farklı olmak üzere, $fog \neq gof$

IV. $f: A \to A$ biçiminde bire bir ve örten bir fonksiyonu için $(fof^{-1})(x) = x$

Ancak $A \neq B$ olmak üzere

$f: A \to B$ biçiminde bire bir ve örten bir f fonksiyonu için ise $fof^{-1} \neq f^{-1}of$

V. $(fog)^{-1}(x) = (g^{-1}of^{-1})(x)$

VI. fog bire bir fonksiyon ise g kesinlikle bire birdir.

ADIM PEKİŞTİRME

ÖRNEK 1

$$f(x) = \frac{3x+1}{2}$$

$$(f^{-1}og)(x) = 4x - 1$$

olduğuna göre, g(x) neye eşittir?

Çözüm

g(x) i bulabilmek için ikinci eşitliğin her iki tarafını f ile işleme sokalım.

$$\underbrace{fof^{-1}}_{I}og = fo(4x-1)$$

$$g(x) = f(4x-1)$$

$$g(x) = \frac{3.(4x-1)+1}{2}$$

$$g(x) = \frac{12x-2}{2}$$

$g(x) = 6x - 1$ bulunur.



ÖRNEK 2

$f(x) = x^2 + 6x$

$(fog)(x) = x^2 + 2x - 8$

olduğuna göre, g(x) fonksiyonu neye eşittir?

Çözüm

$(fog)(x) = f(g(x))$

$f(x) = x^2 + 6x \Rightarrow f(g(x)) = g^2(x) + 6g(x)$

Bu durumda

$g^2(x) + 6g(x) = x^2 + 2x - 8$

eşitliğinin her iki tarafına 9 ekleyelim.

$g^2(x) + 6g(x) + 9 = x^2 + 2x - 8 + 9$

$(g(x) + 3)^2 = (x + 1)^2$

Buna göre,

$g(x) + 3 = x + 1$ veya $g(x) + 3 = -x - 1$

$g(x) = x - 2$ veya $g(x) = -x - 4$

şeklinde sorudaki şartı sağlayan iki farklı g(x) fonksiyonu bulunur.

ÖRNEK 3

$f(x) = \dfrac{2x + a}{x + 1}$ ve $(fof)(x) = \dfrac{x - 7}{2x - 1}$

olduğuna göre, a kaçtır?

Çözüm

Sorunun çözümünü pratik olması nedeniyle değer verme yöntemiyle gerçekleştirelim.

İşlem kolaylığı sağlamak için x = 0 ı kullanalım.

$f(0) = \dfrac{a}{1} = a$

$(fof)(0) = \dfrac{-7}{-1} = 7$

$f(\underbrace{f(0)}_{a}) = f(a) = 7$ bulunur.

Son elde ettiğimiz f(a) = 7 sonucunu f(x) de kullanalım.

$f(a) = \dfrac{2a + a}{a + 1} = 7$

$\dfrac{3a}{a + 1} = 7 \Rightarrow 3a = 7a + 7$

$-4a = 7$

$a = -\dfrac{7}{4}$ bulunur.

ÖRNEK 4

Bire bir ve örten f fonksiyonu için

$(fof)(x) = f(x) + 1$

olduğuna göre, f(x) neye eşittir?

Çözüm

f bire bir ve örten olduğuna göre, tersi de bir fonksiyondur. f(x) i pratik olarak bulabilmek için x yerine $f^{-1}(x)$ yazalım. Her iki tarafa da aynı işlemi uyguladığımızda verilen eşitlik bozulmaz.

O halde,

$(f\, o \underbrace{f\, o f^{-1}}_{I})(x) = f(f^{-1}(x)) + 1$

$f(x) = (fof^{-1})(x) + 1$

$f(x) = x + 1$ bulunur.

2. yol: Fonksiyonun kuralı düşünülerek de çözüm yapılabilir.

$(fof)(x) = f(x) + 1$

$f(\underbrace{f(x)}_{x}) = \underbrace{f(x)}_{x} + 1 \Rightarrow f(x) = x + 1$ bulunur.

ÖRNEK 5

$f(x) = \log_2 x$

$g(x) = |x + 1|$

olduğuna göre, (fog)(x) = 3 eşitliğini sağlayan x değerlerinin çarpımı kaçtır?

Çözüm

$(fog)(x) = f(g(x)) = f(|x + 1|) = 3$

$f(|x + 1|) = \log_2 |x + 1| = 3$

$|x + 1| = 2^3 = 8$

bulunduğuna göre,

$x + 1 = 8$ veya $x + 1 = -8$

$x = 7$ veya $x = -9$

olduğundan x in alabileceği değerler çarpımı –63 tür.

APOTEMİ

ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

1. $f(x) = x + 2$

$(gof)(x) = 3x - 1$

olduğuna göre, g(x) neye eşittir?

A) $6x - 1$ B) $6x - 3$ C) $3x - 2$ D) $3x - 7$ E) $3x - 3$

2. $f^{-1}(x) = 2x - 1$

$(fog)(x) = 4x - 2$

olduğuna göre, g(1) kaçtır?

A) 5 B) 4 C) 3 D) –1 E) –2

3. a bir gerçel sayı olmak üzere, pozitif gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı f ve g fonksiyonları

$f(x) = ax^3 + 10$

$g(x) = \frac{x}{a} + 11$

biçiminde tanımlanıyor.

$f(1) = (gof)(2)$

olduğuna göre, f(2) değeri kaçtır?

A) 8 B) 18 C) 24 D) 40 E) 90

4. f, g ve h fonksiyonları R den R ye bire bir ve örten olmak üzere,

$(fog)(x) = 2x - 5$

$(hog)(x) = x - 3$

olduğuna göre, $(foh^{-1})(3)$ kaçtır?

A) –5 B) 0 C) 1 D) 5 E) 7

5. Bire bir ve örten bir f fonksiyonu için

$(fof)(x) + f(x) = x - 2$

olduğuna göre, $f(2) - f^{-1}(2)$ işleminin değeri kaçtır?

A) –6 B) –4 C) 0 D) 2 E) 3

6. $f: R - \{4\} \rightarrow R - \{4\}$ olmak üzere,

$f(x) = \frac{4x - 1}{x - 4}$

olduğuna göre, $\underbrace{(fofofo..of)}_{100 \text{ tane}}(-1)$ kaçtır?

A) –1 B) 1 C) 2 D) 3 E) 2^{100}

1) D 2) C 3) E 4) E 5) B 6) A

APOTEMI

7. $f(x) = \frac{3x+k}{x-1}$

$(fof)(x) = \frac{5x+1}{x+1}$

olduğuna göre, k kaçtır?

A) –1 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

8. $f(x) = x^2 - 4x$

$(fog)(x) = x^2 - 4$

olduğuna göre, g(x) fonksiyonu aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $g(x) = \sqrt{x} + 2$ B) $g(x) = \sqrt{x} - 2$

C) $g(x) = x + 2$ D) $g(x) = -x - 2$

E) $g(x) = 2x$

9. $fog : (-1, 2) \rightarrow A$ olmak üzere,

$f(x) = -x^2$

$g(x) = 1 - |x|$

olduğuna göre, A kümesi aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) [–2, –1) B) [–1, 0] C) [0, 2]

D) [0, 3) E) (1, 2)

7) B 8) C 9) B

10. $(x + 3)(fog)(x) + (2 - x)f(x) = x^2 + x$

olduğuna göre, $g^{-1}(-3)$ kaçtır?

A) –5 B) –2 C) $\frac{1}{5}$ D) 2 E) 3

11. A boş olmayan bir küme olmak üzere f ve g, A dan A ya tanımlı birer fonksiyondur.

fog ve gof bileşke fonksiyonları bire bir olduğuna göre,

I. f bire birdir.

II. g bire birdir.

III. fog örtendir.

ifadelerinden hangileri kesinlikle doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve II

D) I ve III E) II ve III

12. A = {1, 2, 3, 4} olmak üzere,

f ve g, A dan A ya tanımlı bire bir iki fonksiyon olmak üzere,

$(fog)(2) > 2$

eşitsizliğini sağlayan kaç farklı (fog)(x) fonksiyonu yazılabilir?

A) 12 B) 10 C) 9 D) 6 E) 4

10) D 11) C 12) A

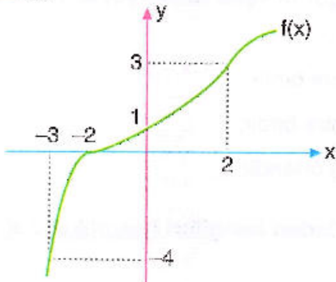
ADIM



FONKSİYON GRAFİKLERİNDE DEĞER BULMA

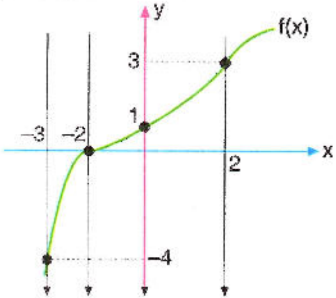
Bir fonksiyonun tanım kümesindeki elemanlara karşılık gelen değerleri fonksiyonun grafiği üzerinde bulabilmek için, değer aranan tanım kümesi elemanlarından x eksenine dik olacak şekilde bir doğru çizilir. Bu doğrunun grafiği kestiği noktanın ordinatı, aranan değer olacaktır.

ÖRNEK 1



Yukarıda grafiği verilen f(x) fonksiyonunda bazı değerleri bulalım.

x = 2, x = 0, x = –2, x = 3 için f in alacağı değerler x eksenine dik olacak şekilde çizilen doğrular yardımıyla aşağıdaki gibi bulunur.



x = 2 için $f(2) = 3$

x = 0 için $f(0) = 1$

x = –2 için $f(-2) = 0$

x = –3 için $f(-3) = -4$

Aynı mantıkla y eksenine dik olacak şekilde doğrular çizilirse f^{-1} ters fonksiyonundaki değerler elde edilir.

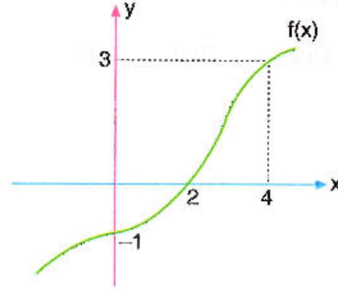
Ya da $f(2) = 3 \Leftrightarrow f^{-1}(3) = 2$

$f(0) = 1 \Leftrightarrow f^{-1}(1) = 0$

şeklinde f yardımıyla f^{-1} de değer bulma işlemi gerçekleştirilir.

ADIM PEKİŞTİRME

ÖRNEK 1



Yukarıda f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$f^{-1}(a + f^{-1}(-1)) = 4$ eşitliğini sağlayan x değeri kaçtır?

Çözüm

İlk olarak $f^{-1}(-1)$ değerini bulalım. Grafiğe bakıldığında $f(0) = -1$ olduğu görülür.

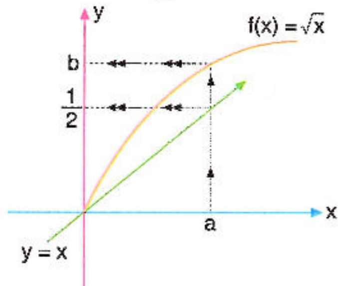
$f(0) = -1 \Leftrightarrow f^{-1}(-1) = 0$ dır.

O halde $f^{-1}(a + \underbrace{f^{-1}(-1)}_{0}) = f^{-1}(a) = 4$

$f^{-1}(a) = 4 \Leftrightarrow f(4) = a$

Yine grafiğe bakıldığında x = 4 için f(4) = 3 olduğundan a = 3 bulunur.

ÖRNEK 2



Yukarıda $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonu ve y = x doğrusunun grafiğinde oklar yardımıyla bazı değerler gösterilmiştir.

Buna göre, b kaçtır?

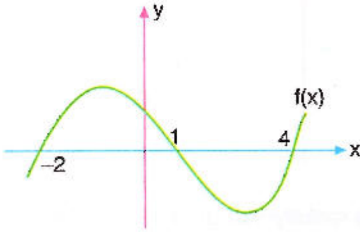
Çözüm

x = a için y = x doğrusunda ordinat $y = \frac{1}{2}$ dir.

$y = \frac{1}{2}$ ise $x = \frac{1}{2}$ yani $a = \frac{1}{2}$ olmalıdır.

$f(a) = b \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ bulunur.

ÖRNEK 3



Yukarıda y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.
Buna göre, f(x + 2) = 0 denklemini sağlayan x değerlerinin toplamı kaçtır?

Çözüm

f(x) fonksiyonunun grafiğine baktığımızda −2, 1 ve 4 apsisli noktalarda x eksenini kestiğini görüyoruz. Bu durumda f(−2) = f(1) = f(4) = 0 dır. O halde f(x + 2) = 0 denkleminin sağlayan x değerleri

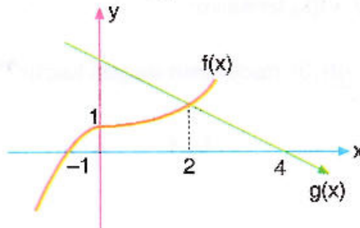
$x + 2 = -2 \Rightarrow x = -4$

$x + 2 = 1 \Rightarrow x = -1$

$x + 2 = 4 \Rightarrow x = 2$ olur.

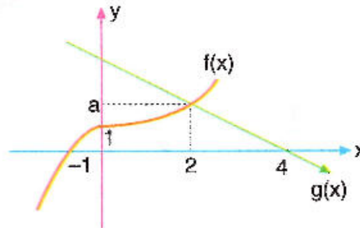
Bu değerlerin toplamı da −4 − 1 + 2 = −3 tür.

ÖRNEK 4



Şekilde f(x) ve g(x) fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.
Buna göre, $(f^{-1}og)(2) + (fog)(4)$ toplamı kaçtır?

Çözüm



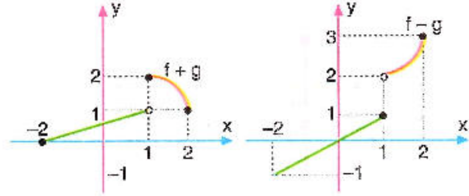
Grafikte x = 2 için f ve g nin gittiği değeri a olarak adlandıralım. Bu durumda,

$$(f^{-1}og)(2) = f^{-1}(\underbrace{g(2)}_{a}) = f^{-1}(a) = 2$$

$$(fog)(4) = f(\underbrace{g(4)}_{0}) = f(0) = 1 \text{ olur.}$$

O halde $(f^{-1}og)(2) + (fog)(4) = 2 + 1 = 3$ bulunur.

ÖRNEK 5



Şekilde f+g ve f−g fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.
Buna göre, f(2) + g(1) toplamının değeri kaçtır?

Çözüm

Önce f(2) için f + g ve f − g grafiklerini inceleyelim.

$(f + g)(2) = 1 = f(2) + g(2)$

$(f - g)(2) = 3 = f(2) - g(2)$ +

$4 = 2f(2) \Rightarrow 2 = f(2)$ olur.

Şimdi g(1) için f + g ve f − g grafiklerini inceleyelim.

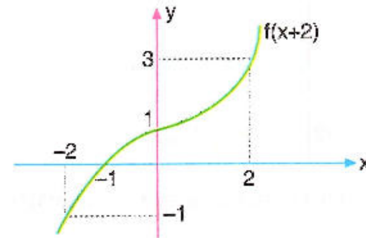
$(f + g)(1) = 2 = f(1) + g(1)$

$(f - g)(1) = 1 = f(1) - g(1)$ −

$1 = 2g(1) \Rightarrow \frac{1}{2} = g(1)$ olur.

Buna göre, $f(2) + g(1) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ bulunur.

ÖRNEK 6



Yukarıdaki grafik f(x + 2) fonksiyonuna aittir.
Buna göre, $f(4) + f(2) + f^{-1}(-1)$ toplamı kaçtır?

Çözüm

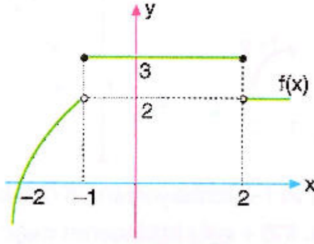
f(4), f(2) ve $f^{-1}(-1)$ değerlerini tek tek bulalım.

- f(4) için f(x + 2) fonksiyonunda x yerine 2 yazmalıyız. Grafik x = 2 için 3 e gittiğinden f(2+2) = f(4) = 3 olur.
- f(2) için f(x + 2) fonksiyonunda x yerine 0 yazmalıyız. Grafik x = 0 için 1 e gittiğinden f(0+2) = f(2) = 1 olur.
- $f^{-1}(-1)$ i bulalım. Grafik x = −2 için −1 e gittiğinden $f(-2+2) = -1 \Rightarrow f(0) = -1 \Rightarrow f^{-1}(-1) = 0$ olur.

Buna göre, $f(4) + f(2) + f^{-1}(-1) = 3 + 1 + 0 = 4$ bulunur.

ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

1.

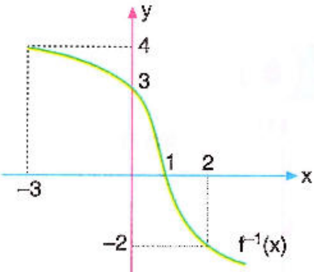


Yukarıdaki grafik y = f(x) fonksiyonunun grafiğidir.

Buna göre, (fofof)(–1) + f(–2) toplamının değeri kaçtır?

A) –2 B) –1 C) 0 D) 2 E) 3

2.

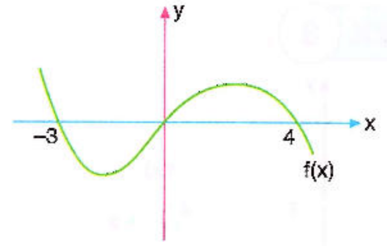


Yukarıdaki grafik f fonksiyonunun tersi $f^{-1}(x)$ fonksiyonunun grafiğidir.

Buna göre, $(fof)^{-1}(3)$ değeri kaçtır?

A) –3 B) –2 C) 0 D) 1 E) 2

3.



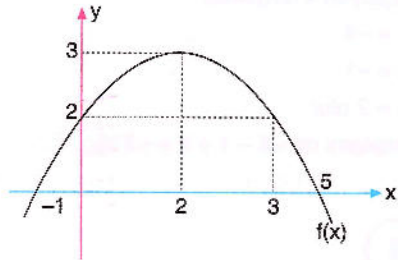
Yukarıdaki y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) f(–2) > 0 B) f(–5) < 0 C) f(0) < 0

D) f(2).f(5) < 0 E) f(–4).f(1) < 0

4.

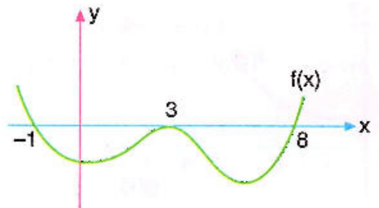


Yukarıdaki grafik y = f(x) fonksiyonuna aittir.

Buna göre, $\underbrace{(fofo...of)}_{33 \text{ tane}}(3)$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) –1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

5.



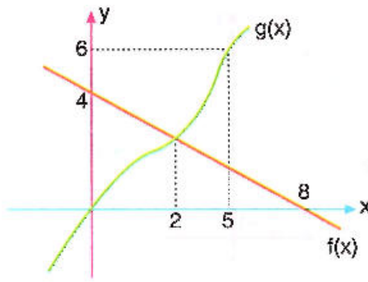
Yukarıda y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$f(x^2 - 2x) = 0$ denklemini sağlayan x değerlerinin toplamı kaçtır?

A) 8 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

1) E 2) D 3) D 4) B 5) C

6.

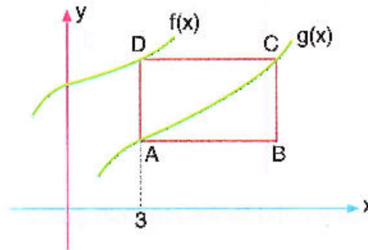


Yukarıda f doğrusal fonksiyonu ile g fonksiyonunun grafikleri verilmiştir.

Buna göre, $(f^{-1}og)(2) + (f^{-1}og)(5)$ toplamının değeri kaçtır?

A) –5 B) –4 C) –2 D) 2 E) 4

7.



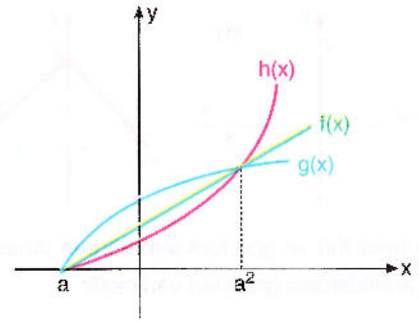
Yukarıdaki grafikte f ve g fonksiyonları ile [AB] kenarı Ox eksenine paralel ABCD dikdörtgeni verilmiştir.

A noktasının apsisi 3 olduğuna göre, B noktasının apsisi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) f(3) B) g(3) C) g(f(3))

D) $f^{-1}(g(3))$ E) $g^{-1}(f(3))$

8.



Yukarıda f, g ve h fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

Buna göre,

I. $a < -1$ ise $f(-1) < g(-1) < h(-1)$ olur.

II. $a > -1$ ise $g(1) < f(1) < h(1)$ olur.

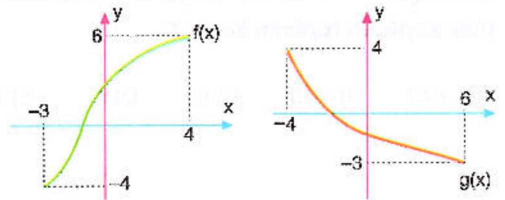
III. $a^2 > 1$ ise $f(-a) < h(-a)$ olur.

ifadelerinden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III

D) I ve II E) II ve III

9.



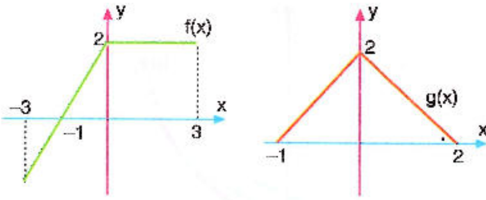
Yukarıda f(x) ve g(x) fonksiyonlarının tanımlı oldukları aralıklardaki grafikleri verilmiştir.

Buna göre, $-4 < (fog)(2-x) \leq 6$ eşitsizliğini sağlayan x tamsayı değerlerinin toplamı kaçtır?

A) 21 B) 20 C) 15 D) 12 E) 11

6) C 7) E 8) B 9) C

10.

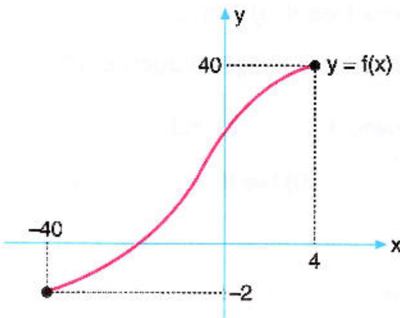


Yukarıda f(x) ve g(x) fonksiyonlarının tanımlı oldukları aralıklardaki grafikleri verilmiştir.

Buna göre, (f − 2g)(x) ≤ 0 eşitsizliğini sağlayan kaç farklı x tamsayı değeri vardır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

11.

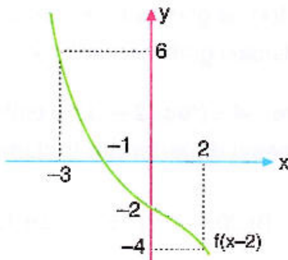


Yukarıda [−40, 4] aralığında tanımlı f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, f in tanım ve görüntü kümesindeki tüm sayıların toplamı kaçtır?

A) −840 B) −40 C) 0 D) 4 E) 7

12.

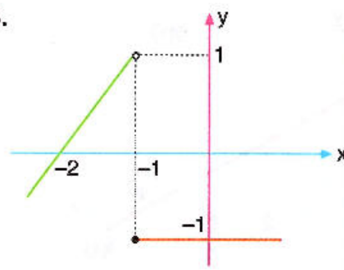


Yukarıdaki grafik f(x − 2) fonksiyonuna aittir.

Buna göre, $f(-3) + f(0) + f^{-1}(6)$ toplamının değeri kaçtır?

A) −9 B) −7 C) −4 D) 0 E) 2

13.



Yukarıda f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

f(f(a) − 1) < 0 eşitsizliğini sağlayan a değerlerinin kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) (−∞, −2]

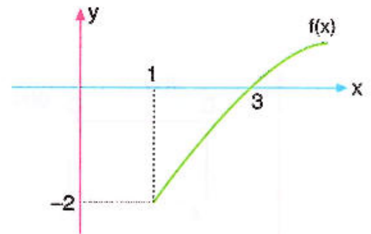
B) (−∞, −1)

C) [−2, 0)

D) (− ∞, −3)∪[−2, −1)

E) (− ∞, −2] ∪ {−1}

14.



Yukarıda y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

f(x) fonksiyonunun y = x doğrusuna göre simetriği g(x), x eksenine göre simetriği h(x) tir.

Buna göre, $(hog)(-2) + (f^{-1}oh)(3)$ toplamının değeri kaçtır?

A) −4 B) −1 C) 0 D) 2 E) 5

10) C 11) E 12) A 13) D 14) E

APOIEMI

ADIM GÜÇLENDİRME TESTİ-1

1. $f : R \to R$ ve $g : R \to R$ olmak üzere,

$f(x + 1) = 2x + 1$

$g(x) = f(x + f(x))$

olduğuna (gof)(2) ifadesinin değeri kaçtır?

A) 4 B) 7 C) 15 D) 18 E) 19

2. f doğrusal fonksiyon olmak üzere,

$f(x) - 2f(-x) = x$

olduğuna göre, $f^{-1}(x)$ fonksiyonu aşağıdakilerden hangisine aittir?

A) 3x B) $\frac{x}{3}$ C) x D) –3x E) $-\frac{x}{3}$

3. A = {0, 1, 2, 3, 4, 5} kümesi veriliyor.

f: $A \to A$ olmak üzere,

Her $x \in A$ için $f(x) \neq 2x$ koşulunu sağlayan kaç farklı f sabit fonksiyonu yazılabilir?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

1) C 2) A 3) D

4. Pozitif tamsayılardan pozitif tamsayılara tanımlanan f fonksiyonu için

$f(x + 1) = 2x.f(x) - f(2)$

eşitliği veriliyor.

Buna göre, $\frac{f(5)}{f(2)}$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) 17 B) 21 C) 87 D) 135 E) 151

5. a ile b, sıfırdan ve birbirinden farklı iki reel sayı olmak üzere,

$f(x) = ax + b$

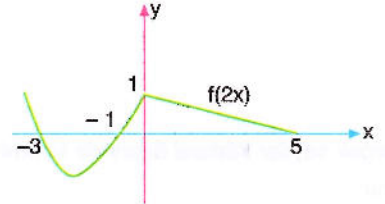
$g(x) = bx + a$

$(fog)(x) = (gof)(x)$

olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi daima doğrudur?

A) a.b = 1 B) a – b = 1 C) a + b = 1 D) a = 2b E) $a^2 = b^2$

6.



Yukarıda y = f(2x) fonksiyonunun tanımlı olduğu aralıkta grafiği verilmiştir.

(fof)(x) = 1 eşitliğini sağlayan x değerlerinin toplamı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 8 E) 12

4) D 5) C 6) B

7. $x > 0$ olmak üzere,

$$f(x+1) = \frac{2x+a}{x+1}$$

$$f(f(x)) = \frac{5x+2}{2x+1}$$

olduğuna göre, a kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) 3

8. $f(x) = x^2 + 6x$

$(fog)(x) = x^2 - 9$

olduğuna göre, g(6) aşağıdakilerden hangisine eşit olabilir?

A) –12 B) –9 C) –3 D) 0 E) 6

9. R gerçek sayılar kümesi üzerinde tanımlı bir f fonksiyonu

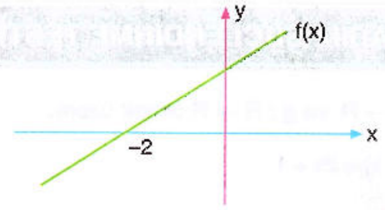
- Her $x \in [-3, 3]$ $f(x) = x^2 + 1$
- Her $x \in R$ için $f(x) = f(-x + 10)$

olduğuna göre, f(a) = 2 eşitliğini sağlayan a sayısı aşağıdakilerden hangisi <u>olamaz</u>?

A) –1 B) 1 C) 7 D) 9 E) 11

7) E 8) B 9) C

10.

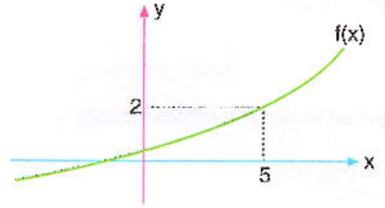


Yukarıda y = f(x) doğrusal fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

(x – 3) . f(x) < 0 eşitsizliğini sağlayan x değerlerinin kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\infty, 0)$ B) $(-2, 0)$ C) $(-2, 3)$ D) $(0, 3)$ E) $(3, \infty)$

11.

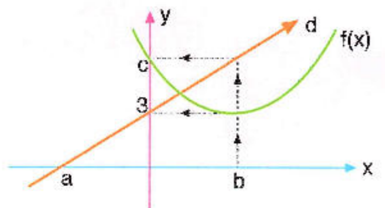


Yukarıda y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$g(x) = x^2 - 4x$ olduğuna göre, (fog)(x) < 2 eşitsizliğini sağlayan x tamsayılarının toplamı kaçtır?

A) –3 B) 0 C) 4 D) 10 E) 15

12.



Yukarıda $f(x) = x^2 - 2x + 4$ fonksiyonu ile d doğrusunun grafiğinde bazı noktalara karşılık gelen değerler a, b, c harfleri ve oklarla gösterilmiştir.

Buna göre, a + b + c toplamı kaçtır?

A) –1 B) 0 C) 2 D) 7 E) 10

10) C 11) D 12) C

ADIM GÜÇLENDİRME TESTİ-2

1. A = {a, b, c, d} kümesi veriliyor.

f: A → A

biçiminde f fonksiyonunda f(a) = d ve f(b) = c olduğuna göre, bu koşulları sağlayan kaç farklı f fonksiyonu yazılabilir?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 16

2. **Gerçek sayılar kümesinde tanımlı,**

$\beta_1 = \{(x, y) : x.y = 0\}$

$\beta_2 = \{(x, y) : |x| + |y| = 1\}$

$\beta_3 = \{(x, y) : x^3 - y^3 = 1\}$

bağıntıların hangileri bir fonksiyon belirtir?

A) Yalnız β_1 B) Yalnız β_2 C) Yalnız β_3

D) β_1 ve β_3 E) β_1, β_2 ve β_3

3. $f : [-3, 2] \to R$ $f(x) = x^2 - x + 1$

$g : [-2, 4) \to R$ $g(x) = x - 1$

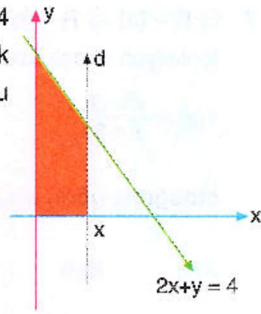
olduğuna göre, (f + g)(x) fonksiyonunun görüntü kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) [–2, 2] B) [–4, 4] C) [0, 4)

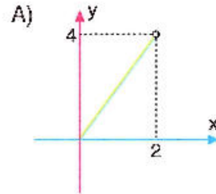
D) [0, 4] E) [–1, 5]

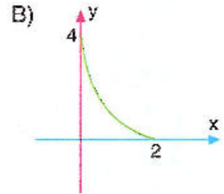
1) E 2) C 3) D

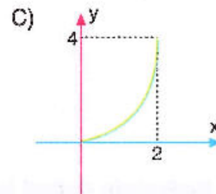
4. Yandaki şekilde 2x + y = 4 doğrusu ile x eksenine dik olarak değişen d doğrusu verilmiştir.

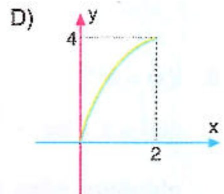


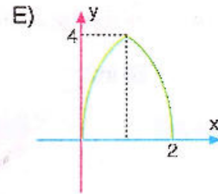
0 ≤ x ≤ 2 olmak üzere, f: x → "Taralı bölgenin alanı" şeklinde tanımlanan y = f(x) fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

5. Gerçek sayılar kümesinde tanımlı f fonksiyonu

$f(x) = x^2 - 5x + 3$ biçiminde veriliyor.

m ≠ n olmak üzere, f(m) = f(n) olduğuna göre, m + n toplamı kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

6. $f(x) = 2^x + \frac{1}{2^x}$

olduğuna göre, f(2x) in f(x) türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $f^2(x)$ B) $f^2(x) - 2$ C) $f(x) + 2$

D) $f^2(x) + f(x)$ E) $2f(x)$

4) D 5) D 6) B

7. $f : R - \{a\} \rightarrow R - \{b\}$ fonksiyonu bire bir ve örten bir fonksiyon olmak üzere,

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$$

olduğuna göre, a + b toplamı kaçtır?

A) 3 B) 0 C) –3 D) –6 E) –9

8. $f(x) = e^{x+1}$

$g(x) = 1 + \ln x$

olduğuna göre, $(gof^{-1})(e^3)$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) 1 B) ln2 C) 2ln2 D) 2 + ln2 E) ln(2e)

9. A = {2, 3, 4, 5, 6} olmak üzere,

$f : A \rightarrow A$

biçiminde tanımlı f fonksiyonu bire birdir.

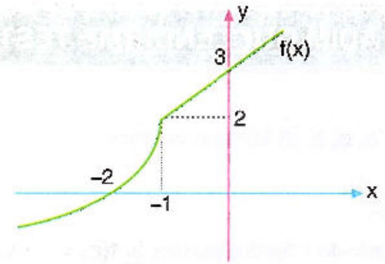
$f(2) + f(3) + f(4) = f(5) + f(6)$

eşitliğini sağlayan kaç farklı f fonksiyonu yazılabilir?

A) 3 B) 6 C) 12 D) 24 E) 36

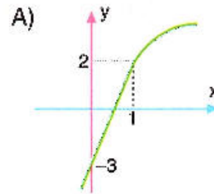
7) E 8) E 9) C

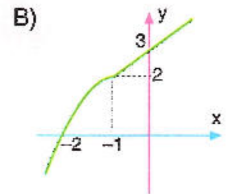
10.

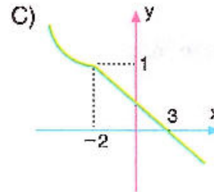


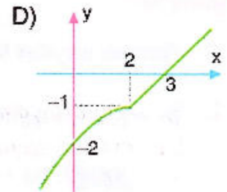
Yukarıdaki grafik R den R ye tanımlı f fonksiyonuna aittir.

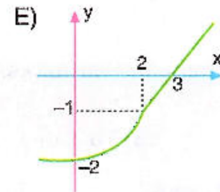
Buna göre, $f^{-1}(x)$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

A) 

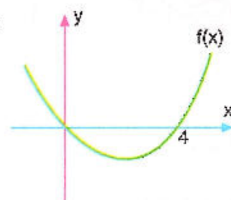
B) 

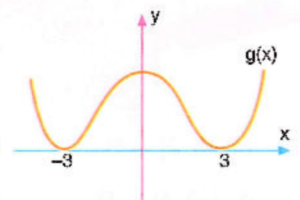
C) 

D) 

E) 

11.





Yukarıda f ve g fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

Buna göre, f(x) + g(x) = 0 eşitliğini sağlayan x değerlerinin kaç tanesi tam sayı olabilir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 7

10) D 11) B

ADIM GÜÇLENDİRME TESTİ-3

1. Tanımlı oldukları aralıklarda f ve gof fonksiyonları

$$f(x)=\frac{x-2}{x+1} \quad \text{ve} \quad (gof)(x)=x+3$$

biçiminde olduğuna göre, g(x) aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\frac{x-1}{x+1}$ B) $\frac{3x+2}{x-2}$ C) $\frac{3x-2}{x+1}$ D) $\frac{4x-5}{x-1}$ E) $\frac{2x-5}{x-1}$

2. Pozitif tam sayılarda tanımlı bir f fonksiyonu her a ve b pozitif tam sayısı için

$$f(a.b)=f(a)+f(b)$$

eşitliğini sağlamaktadır.

f(3) = 6 olduğuna göre, f(27) kaçtır?

A) 9 B) 18 C) 27 D) 36 E) 81

3. Gerçek sayılarda tanımlı bir f fonksiyonu için

$$f(3x-1)=6x-4-f(5)$$

olduğuna göre, $f^{-1}(x)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $2x-6$ B) $6x-8$ C) $\frac{x+8}{6}$ D) $\frac{x+6}{2}$ E) $3x-4$

1) E 2) B 3) D

4. f: A → B ve g: B → C biçiminde birbirinden ve birim fonksiyondan farklı f ve g fonksiyonları tanımlanıyor.

Buna göre,

I. f ve g fonksiyonları örten ise gof fonksiyonu da örtendir.

II. f ve g fonksiyonları bire bir ise gof fonksiyonu da bire birdir.

III. fog = gof

ifadelerinden hangileri kesinlikle doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III D) I ve II E) II ve III

5. Tanımlı olduğu aralıkta

$$f(x)=\frac{1}{x^2+7x+12}$$

olduğuna göre, f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(16) toplamının değeri kaçtır?

A) 1 B) $\frac{19}{20}$ C) $\frac{9}{10}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{3}{4}$

6. **Tanım kümesi {−2, −1, 0, 1, 2, 3} kümesinin 3 elemanından, değer kümesi {1, 2, 3, 4} kümesinin 2 elemanından oluşan kaç farklı fonksiyon tanımlanabilir?**

A) 960 B) 640 C) 480 D) 120 E) 72

4) D 5) D 6) A

7. Tanımlı oldukları aralıklarda

$f(x + 2) = (a - 2)x + b + 1$ birim fonksiyon ve

$g(x) = \dfrac{ax + c}{bx - 4}$ sabit fonksiyon

olduğuna göre, a + b + c toplamı kaçtır?

A) –12 B) –9 C) –8 D) 1 E) 3

8. $(fog^{-1})^{-1}(2x - 3) = g(3x + 1)$

olduğuna göre, f(10) değeri kaçtır?

A) 3 B) 7 C) 10 D) 17 E) 32

9. $f: Z^{+} \rightarrow R$

$g: [-3, 5) \rightarrow R$ olmak üzere,

$(f + 3g)(x) = 6x - 11$

$(f - g)(x) = 2x + 1$

olduğuna göre, (f + g)(x) fonksiyonunun görüntü kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

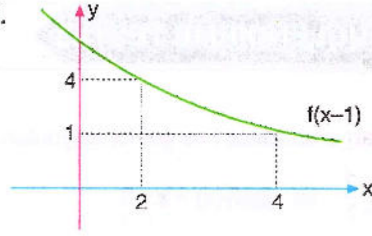
A) {–3, –1, 1} B) {–1, 2, 7, 10}

C) {–2, 3, 7, 13} D) {–1, 3, 7, 11}

E) {0, –1, 7, 13}

7) C 8) A 9) D

10.



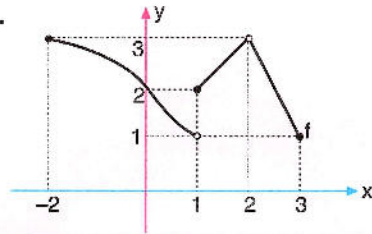
Yukarıdaki grafik f(x – 1) fonksiyonuna aittir.

$(gofof)(x) = 5x - 7$

olduğuna göre, g(4) değeri kaçtır?

A) –7 B) 2 C) 3 D) 5 E) 8

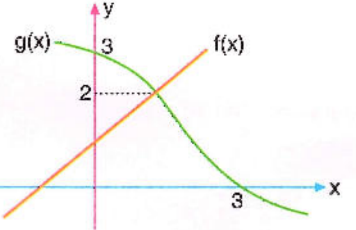
11.



Yukarıda grafiği verilen f(x) fonksiyonunun tanım kümesi A, görüntü kümesi B olduğuna göre, A ∩ B kümesinde kaç farklı tamsayı değeri vardır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

12.



Yukarıda f ve g fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

$g^{-1}(2) - g^{-1}(0) = -2$

$f^{-1}(2) - f^{-1}(0) = 3$

olduğuna göre, f(–2) değeri kaçtır?

A) –2 B) –1 C) $-\frac{1}{2}$ D) 0 E) $\frac{1}{2}$

10) E 11) B 12) D

ADIM GÜÇLENDİRME TESTİ-4

1. $f(x)=\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^3+x^2+x+1}$

olduğuna göre, $f(\sqrt{2}-1)$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$ B) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$ C) $1-\sqrt{2}$ D) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

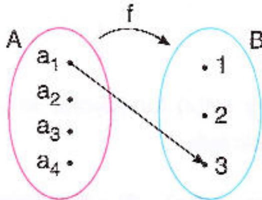
2. $A=\{1, 2, 3\}$ ve $B=\{0, 3, 4, 5\}$ kümeleri veriliyor.

$f: A \to B$ olmak üzere,

Her $x \in A$ için $f(x) < x^2$ koşulunu sağlayan kaç farklı f fonksiyonu yazılabilir?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 12 E) 18

3. Aşağıda $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ ve $B=\{1, 2, 3\}$ kümeleri verilmiştir.



A dan B ye $f(a_1)=3$ olacak biçimde kaç örten fonksiyon yazılabilir?

A) 2 B) 3 C) 6 D) 12 E) 18

4. Z tamsayılar kümesini göstermek üzere,

$f: Z \to Z$

$f(x)=\dfrac{(x-1).(2x+1)}{(a-2).x+1}$

biçiminde tanımlanan f fonksiyonunun tersi de fonksiyon olduğuna göre, a kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

5. $f: R^+ \to R$ olmak üzere,

$f\left(\dfrac{4}{x}\right)=x+2f\left(\dfrac{x}{4}\right)$

olduğuna göre, f(4) değeri kaçtır?

A) −12 B) −11 C) −10 D) −9 E) −6

6. $x>2$ olmak üzere,

$f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^3+\dfrac{1}{x^3}$

olduğuna göre, $f^{-1}(18)$ değeri kaçtır?

A) $\dfrac{5}{12}$ B) 3 C) 6 D) 9 E) $\dfrac{15}{2}$

1) C 2) A 3) D 4) E 5) B 6) B

7. A = {–2, –1, 0, 1, 2} olmak üzere,

f fonksiyonu her $x \in A$ için

$f(x) = 3x + 1$

$f(x) = f(x + 5)$

eşitliklerini sağladığına göre, f(7) + f(8) + ... + f(17) toplamının değeri kaçtır?

A) 17 B) 15 C) 12 D) 7 E) 0

8. Taban yarıçapı 1 metre, yüksekliği 4 metre olan dik silindir biçiminde bir depo tamamen su ile doludur. Deponun tabanına yerleştirilen bir musluk dakikada 5 m^3 su boşaltabilmektedir.

f: t → "t dakika sonra havuzun dolu kısmının hacmi" biçiminde bir f fonksiyonu tanımlanıyor.

Buna göre, $f^{-1}(t)$ fonksiyonunun denklemi aşağıdakilerden hangisi olur?

A) $\frac{4\pi t}{5}$ B) $4\pi - t$ C) $\frac{t-5}{4\pi}$

D) $\frac{4\pi - t}{5}$ E) $4\pi - 5t$

9. Aşağıdakilerden hangisi her x ve y gerçek sayısı için

$$f(x-y) = \frac{f(x)}{f(y)}$$

eşitliğini sağlar?

A) $f(x) = x^x$ B) $f(x) = \sqrt{x}$ C) $f(x) = x^3$

D) $f(x) = \ln x$ E) $f(x) = 2^{-x}$

7) A 8) D 9) E

10. Bir öğrenci aşağıdaki iddiayı ispatlamaya çalışmaktadır.

İddia: $f: X \to Y$ ve $g_1, g_2: Y \to Z$

$g_1 o f = g_2 o f$ ise $g_1 = g_2$ dir.

Öğrencinin ispatı:

Her $y \in Y$ için

I. En az bir $x \in X$ için $f(x) = y$

II. $g_1(y) = g_1(f(x)) = (g_1 o f)(x)$

III. $(g_1 o f)(x) = (g_2 o f)(x)$

IV. $(g_2 o f)(x) = g_2(f(x)) = g_2(y)$

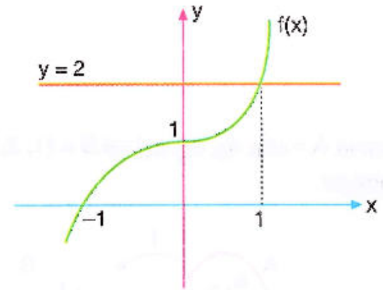
V. Her $y \in Y$ için $g_1(y) = g_2(y)$

olduğuna göre, $g_1 = g_2$ olur.

Bu öğrenci numaralanmış adımların hangisinde hata yapmıştır?

A) I B) II C) III D) IV E) V

11.



Yukarıda y = f(x) fonksiyonu ile y = 2 doğrusunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, x.(f(x) – 2) < 0 eşitsizliğini sağlayan x değerlerinin kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) (–∞, –1) B) (–1, 0) C) (–1, 1)

D) (0, 1) E) (–∞, 1)

10) A 11) D

ADIM GÜÇLENDİRME TESTİ-5
ÇÖZÜMLÜ

1. $A = \{x \mid x = 2n \text{ , n tam sayı}\}$ kümesi veriliyor.

$f: A \to B$

$f(x) = \frac{x+2}{2}$

biçiminde tanımlanan f fonksiyonunun görüntü kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) Tamsayılar
B) Pozitif tamsayılar
C) Negatif tamsayılar
D) Tek sayılar
E) Çift sayılar

2. Bir f fonksiyonu için

$f(x) = 2^x . f(x + 1)$

$f(8) = 2^{-24}$

eşitliği verildiğine göre, f(1) değeri kaçtır?

A) 2^{-2} B) 1 C) 2^4 D) 2^6 E) 2^8

3. $g(x) = \frac{2x+1}{3}$

$(fog)(x) = (gof)(x)$

olduğuna göre, f(1) kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 9

1) A 2) C 3) B

4. f ve g gerçek sayılarda tanımlı bire bir iki fonksiyondur.

Herhangi iki x ve y gerçek sayısı için,

$(gof)(x) = (gof)(y)$

eşitliğinin sağlandığı bilindiğine göre, aşağıdakilerden hangisi kesinlikle doğrudur?

A) $x > y$ B) $y > x$ C) $x = y$ D) $x = -y$ E) $x.y = 0$

5. Pozitif tam sayılarda tanımlı f fonksiyonu için

$f(x.y) = f(x) + f(y)$

$f(2) = 8$

olduğuna göre, f(128) değeri kaçtır?

A) 36 B) 48 C) 56 D) 60 E) 64

6. $A = \{1, 2\}$ ve $B = \{1, 2, 3, ..., n\}$ kümeleri veriliyor.

A dan B ye bire bir olmayan 12 fonksiyon tanımlanabildiğine göre, n kaçtır?

A) 4 B) 6 C) 9 D) 12 E) 16

4) C 5) C 6) D

7. Tanımlı olduğu aralıkta bire bir ve örten bir f fonksiyonu için

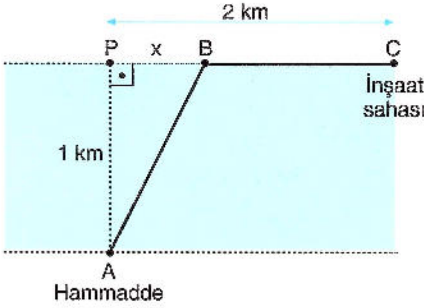
$f^{-1}(x) = \log_2(x + 1) - 2$

olduğuna göre, f(x + 2) nin f(x) cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) 4.f(x) B) 2.f(x) C) 4.f(x) – 4

D) 4.f(x) + 3 E) 8.f(x) + 1

8.



Bir nehrin kenarına kurulan bir inşaatın bulunduğu yeri gösteren kroki yukarıdaki gibidir. A noktasında bulunan hammaddenin nehirde taşınmasının maliyeti metre başına 5 TL iken karada taşınmasının maliyeti metre başına 10 TL dir. A noktasında bulunan hammadde ABC yolu takip edilerek C noktasına ulaştırılacaktır.

x, P ile B arasındaki uzaklığı göstermek üzere, hammaddenin taşınma maliyetini x türünden ifade eden fonksiyon aşağıdakilerden hangisidir?

A) $f(x) = (2 - x).5000$

B) $f(x) = (x - 1)^2.5000$

C) $f(x) = (x^2 + 3).15$

D) $f(x) = \left(\sqrt{x^2 + 2x}\right).15$

E) $f(x) = \left(4 - 2x + \sqrt{x^2 + 1}\right).5000$

9. Uygun şartlarda tanımlı f fonksiyonu için,

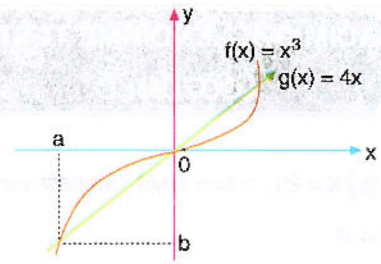
$f(f^{-1}(x) + 2) = 6 + 4.f^{-1}(x)$

olduğuna göre, f(1) değeri kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 8 E) 10

7) D 8) E 9) C

10.

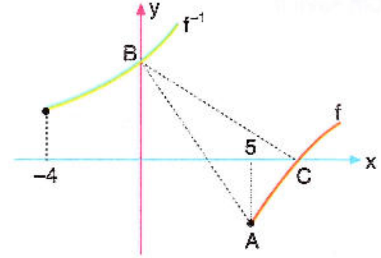


Yukarıda f ve g fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

Buna göre, f(a) + g(b) toplamının değeri kaçtır?

A) –40 B) –36 C) –10 D) 4 E) 24

11.

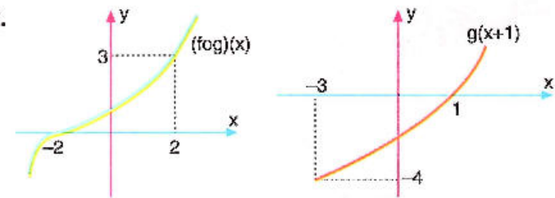


Yukarıda f fonksiyonu ile tersi olan f^{-1} fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

|AB| = 13 olduğuna göre, |BC| kaçtır?

A) 15 B) 12 C) $8\sqrt{2}$ D) $6\sqrt{3}$ E) $12\sqrt{2}$

12.



Yukarıda (fog)(x) ve g(x + 1) fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

Buna göre, f(0) + f(–4) toplamının değeri kaçtır?

A) 7 B) 3 C) 1 D) 0 E) –6

10) A 11) C 12) B

ADIM GÜÇLENDİRME TESTİ-5 ÇÖZÜMLER

1. $A = \{x \mid x = 2n \text{ , n tamsayı}\}$

kümesinin elemanları çift tamsayılardan oluşmaktadır. $x = 2n$ olduğundan,

$$f(x) = \frac{x+2}{2}$$

$$f(2n) = \frac{2n+2}{2} = n+1 \text{ olur.}$$

n tamsayı olduğundan n + 1 de tamsayı olur. Dolayısıyla f fonksiyonunun görüntü kümesi tamsayılar kümesi olacaktır.

Yanıt A

2. $f(x) = 2^x.f(x+1) \Rightarrow \dfrac{f(x)}{f(x+1)} = 2^x$

$x = 7$ için $\dfrac{f(7)}{f(8)} = 2^7$

$x = 6$ için $\dfrac{f(6)}{f(7)} = 2^6$

$x = 5$ için $\dfrac{f(5)}{f(6)} = 2^5$

$\vdots$

$x = 1$ için $\dfrac{f(1)}{f(2)} = 2$

Tüm eşitlikleri taraf tarafa çarparsak

$$\frac{f(7)}{f(8)} \cdot \frac{f(6)}{f(7)} \cdot \ldots \cdot \frac{f(1)}{f(2)} = 2^7 \cdot 2^6 \cdot 2^5 \cdot \ldots \cdot 2$$

$$\frac{f(1)}{f(8)} = 2^{7+6+5+\ldots+1}$$

$$\frac{f(1)}{2^{-24}} = 2^{28} \Rightarrow f(1) = 2^4 \text{ olur.}$$

Yanıt C

3. $(fog)(x) = (gof)(x) \Rightarrow f(g(x)) = g(f(x))$

$g(x) = \dfrac{2x+1}{3}$ olduğuna göre,

$$f(g(x)) = f\left(\frac{2x+1}{3}\right) \ldots\ldots (1)$$

$$g(f(x)) = \frac{2.f(x)+1}{3} \ldots\ldots (2)$$

O halde, (1) ve (2) den

$$f\left(\frac{2x+1}{3}\right) = \frac{2f(x)+1}{3} \text{ olur.}$$

$x = 1$ için

$$f\left(\frac{2.1+1}{3}\right) = \frac{2f(1)+1}{3}$$

$$f(1) = \frac{2f(1)+1}{3}$$

$$3f(1) = 2f(1)+1 \Rightarrow f(1) = 1 \text{ bulunur.}$$

Yanıt B

4. $(gof)(x) = (gof)(y)$

$g(f(x)) = g(f(y))$

g fonksiyonu bire bir olduğundan $f(x) = f(y)$ olmalıdır. f bire bir olduğundan $f(x) = f(y)$ ise $x = y$ olmalıdır. Aksi halde $x \neq y$ olsaydı farklı iki değer için $f(x) = f(y)$ olurdu. Bu da f in bire bir olması ile çelişecekti.

Bu nedenle soruda verilen eşitliğin sağlanabilmesi için $x = y$ olmalıdır.

Yanıt C

5. $f(x.y) = f(x) + f(y)$

eşitliğinde x ve y ye uygun değerler vererek f(128) i bulmaya çalışalım.

x = 2 ve y = 2 için $f(2.2) = f(2) + f(2)$

$f(4) = 2f(2)$

$f(4) = 16$

x = 4 ve y = 4 için $f(4.4) = f(4) + f(4)$

$f(16) = 2f(4)$

$f(16) = 32$

x = 4 ve y = 16 için $f(4.16) = f(4) + f(16)$

$f(64) = 16 + 32$

$f(64) = 48$

x = 64 ve y = 2 için $f(64.2) = f(64) + f(2)$

$f(128) = 48 + 8$

$f(128) = 56$

Yanıt C

6. A dan B ye fonksiyon sayısı $[s(B)]^{s(A)} = n^2$ dir.

s(A) = 2 ve s(B) = n ise A dan B ye bire bir fonksiyon sayısı P(n, 2) tanedir. A dan B ye bire bir olmayan fonksiyon sayısı ise

(Fonksiyon sayısı) – (Bire bir fonksiyon sayısı) = 12 eşitliği yazılabilir.

O halde

$n^2 - P(n, 2) = 12$

$n^2 - \frac{n!}{(n-2)!} = 12 \Rightarrow n^2 - n(n-1) = 12 \Rightarrow n = 12$

bulunur.

Yanıt D



7. Öncelikle f fonksiyonunu bulalım.

$f^{-1}(x) = \log_2(x+1) - 2 = y \Rightarrow \log_2(x+1) = y + 2$

$x + 1 = 2^{y+2}$

$x = 2^{y+2} - 1$

O halde $f(x) = 2^{x+2} - 1$ dir.

x yerine x + 2 yazarak f(x + 2) yi bulabiliriz.

$f(x+2) = 2^{x+4} - 1$ olur.

$f(x) = 2^{x+2} - 1$

$2^{x+2} = f(x) + 1$ dir.

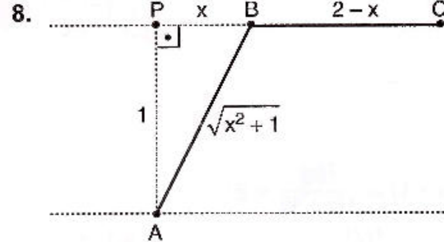
Bu sonucu f(x + 2) de yerine yazalım.

$f(x+2) = 2^{x+2}.2^2 - 1$

$f(x+2) = (f(x)+1).4 - 1 \Rightarrow f(x+2) = 4f(x) + 3$ olur.

Yanıt D

8.



|AB| yolunun metre başına maliyeti 5 TL ise

|AB| yolunda toplam maliyet

$\sqrt{x^2+1}.5000$ TL dir.

$|BC| = (2-x)$ km dir.

|BC| yolunun metre başına maliyeti 10 TL ise |BC| yolunda toplam maliyet

(2 – x).10000 TL dir.

O halde ABC yolunda taşıma maliyetinin fonksiyonu

$f(x) = \left(\sqrt{x^2+1}\right) \cdot 5000 + (2-x) \cdot 10000$

$f(x) = \left(\sqrt{x^2+1} + 4 - 2x\right) \cdot 5000$ bulunur.

Yanıt E

9. $f(f^{-1}(x)+2)=6+4.f^{-1}(x)$

eşitliğinde x yerine f(x) yazarsak

$f(f^{-1}(f(x))+2)=6+4.f^{-1}(f(x))$

Hatırlatma: $(f^{-1}of)(x)=f^{-1}(f(x))=x$

$f(x+2)=6+4.x$ olduğuna göre,

$x=-1$ için $\quad f(-1+2)=6+4.(-1)$

$f(1)=2$ bulunur.

Yanıt C

10. $f(a)=g(a)$

$a^3=4a \Rightarrow a^3-4a=0$

$a(a^2-4)=0$

$a=0$, $a=2$, $a=-2$ olabilir.

Ancak a, y ekseninin solunda yer aldığından $a=-2$ olmalıdır.

$a=-2$ ise $f(a)=b$ olduğundan

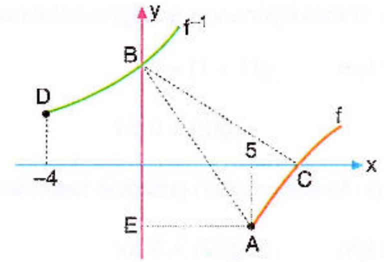
$f(-2)=(-2)^3=-8=b$

$g(b)=g(-8)=(-8).4=-32$ olur.

O halde $\quad f(a)+g(b)=-8-32=-40$ bulunur.

Yanıt A

11.



f fonksiyonunun grafiğinin y = x doğrusuna göre simetriği f^{-1} fonksiyonunun grafiğidir.

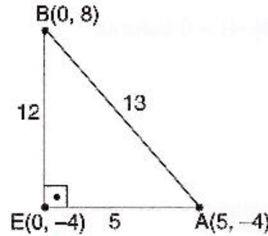
$f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$ olduğuna göre,

A noktasının apsisi D noktasının ordinatına

A noktasının ordinatı D noktasının apsisine eşit olmalıdır. Yani,

$f(5)=-4 \Leftrightarrow f^{-1}(-4)=5$ tir.

$|AB|=13$ olduğuna göre,



$|BE|=12$ olmalıdır.

$f(5)=-4$ olduğundan E noktasının ordinatı –4 tür.

$|BE|=12$ olduğuna göre, B noktasının ordinatı 8 dir.

Bu durumda $f^{-1}(0)=8 \Leftrightarrow f(8)=0$ olur.

O halde C noktasının koordinatları (8, 0) olur.

B(0, 8) ve C(8, 0) olduğundan bu iki noktanın birbirine uzaklığı

$|BC|=\sqrt{(0-8)^2+(8-0)^2}$

$|BC|=\sqrt{128}$

$|BC|=8\sqrt{2}$ bulunur.

Yanıt C

12. g(x + 1) fonksiyonunun grafiğine bakılırsa

$x = 1$ için $g(1 + 1) = 0$

$g(2) = 0$ dır.

(fog)(x) fonksiyonunun grafiğine bakılırsa

$x = 2$ için $(fog)(2) = 3$ tür.

$g(2) = 0 \Rightarrow f(g(2)) = f(0) = 3$ bulunur.

g(x + 1) fonksiyonunun grafiği incelenirse

$x = -3$ için $g(-3 + 1) = -4$

$g(-2) = -4$ tür.

(fog)(x) fonksiyonunun grafiği incelenirse

$x = -2$ için $(fog)(-2) = 0$ dır.

$g(-2) = -4 \Rightarrow f(g(-2)) = f(-4) = 0$ bulunur.

O halde

$f(0) + f(-4) = 3 + 0 = 3$ bulunur.

Yanıt B





FONKSİYONLAR-II

A) Bir Fonksiyonun En Geniş Tanım Kümesi

B) Artan ve Azalan Fonksiyonlar

C) Fonksiyonun Ortalama Değişim Oranı (Hızı)

D) Parçalı Fonksiyon

E) Mutlak Değer Fonksiyonu

F) Fonksiyon Grafiklerinin Çizimi

G) Parçalı Fonksiyonların Grafikleri

H) Mutlak Değer Fonksiyon Grafikleri

I) Grafiklerde Simetri ve Öteleme

ADIM



BİR FONKSİYONUN EN GENİŞ TANIM KÜMESİNİ BULMA

Bu adımda; polinom fonksiyonu, logaritma fonksiyonu, tek ya da çift dereceden köklü fonksiyonlar, rasyonel fonksiyonlar gibi fonksiyonların tanım ve görüntü kümesini bulmayı öğreneceğiz.

1. **Polinom Fonksiyonu**
   $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$
   biçiminde gerçek katsayılı polinom fonksiyonunun **tanım kümesi tüm gerçek sayılar (R) kümesidir.**
   Polinom fonksiyonlarının görüntü kümesi ise verilen fonksiyonun denklemine göre değişir.

ADIM PEKİŞTİRME

ÖRNEK 1

$f(x) = x^2 + 4x + 1$

fonksiyonunun en geniş tanım ve görüntü kümesi nedir?

Çözüm

Her x gerçek sayısı için $f(x) = x^2 + 4x + 1$ ifadesi için bir gerçek sayı bulunabilir. O halde verilen fonksiyon tüm gerçek sayılarda tanımlıdır. Yani tanım kümesi R gerçek sayılar kümesidir.

Görüntü kümesini bulalım. Verilen fonksiyon denklemi bir parabol belirtir. Başkatsayı pozitif olduğundan parabolün kolları yukarı doğrudur. f(x) in alabileceği en büyük değer ∞ dur. En küçük değer tepe noktası yardımıyla bulunabilir.

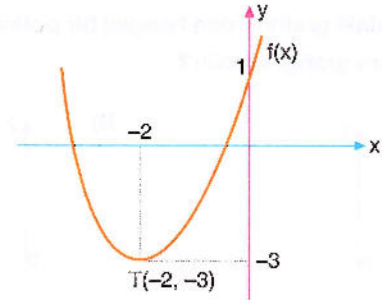
$f(x) = x^2 + 4x + 1$ parabolünde tepe noktası

$r = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2} = -2, k = f(r) = f(-2) = -3$

olduğundan tepe noktası T(–2, –3) tür. Dolayısıyla f(x) in alabileceği en küçük değer –3 tür.

O halde f in görüntüsü [–3, ∞) olur.

Tanım ve görüntü kümesi f(x) parabolünün grafiği çizilerek de kolayca görülebilir.



ÖRNEK 2

$f(x) = x^3$

fonksiyonunun en geniş tanım ve görüntü kümesi nedir?

Çözüm

Verilen fonksiyon her x gerçek sayısı için tanımlıdır. Yani fonksiyonun tanım kümesi R gerçek sayılar kümesidir. Bu durumda tanım kümesinin her elemanı (– ∞, ∞) aralığında yer alır.

x tanım kümesinin herhangi bir elemanı ise

$-\infty < x < \infty$

$-\infty < x^3 < \infty$

olacağından fonksiyonun görüntü kümesi de R gerçek sayılar kümesidir.

ÖRNEK 3

$f(x) = x^4 + 1$

fonksiyonunun en geniş tanım ve görüntü kümesi nedir?

Çözüm

Verilen fonksiyon her x gerçek sayısı için tanımlıdır. Yani tanım kümesi gerçek sayılar kümesidir.

x tanım kümesinin herhangi bir elemanı ise

$-\infty < x < \infty$

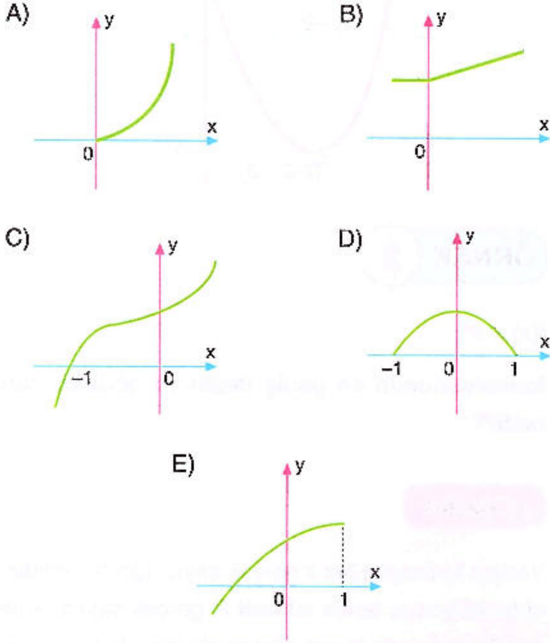
$0 \le x^4 < \infty$

$1 \le x^4 + 1 < \infty$

olacağından fonksiyonun görüntü kümesi [1, ∞) aralığı olacaktır.

ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

1. Aşağıdaki grafiklerden hangisi bir polinom fonksiyonun grafiği olabilir?



2. $f(x) = x^n + 1$

fonksiyonunun görüntü kümesi tüm gerçek sayılar olduğuna göre, n aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) −2 B) 0 C) 2 D) 5 E) 6

3. $f(x) = x^2 - 6x + 1$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(0, \infty)$ B) $(-\infty, \infty)$ C) $(-\infty, 0)$
D) $[3, \infty)$ E) $(-\infty, -3]$

1) C 2) D 3) B

4. Aşağıda verilen fonksiyonlardan hangilerinin görüntü kümesi R gerçek sayılar kümesidir?

I. $f(x) = x^2$
II. $f(x) = x^3 + 1$
III. $f(x) = x^2 + 4x + 2$

A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III
D) I ve III E) I, II ve III

5. Aşağıdaki fonksiyonlardan hangisinin en geniş tanım kümesi R gerçek sayılar kümesi değildir?

A) $f(x) = x^2 - x$ B) $f(x) = -x^3$ C) $f(x) = 0$
D) $f(x) = (x-1)^{1-x}$ E) $f(x) = 2^{-x}$

6. $f(x) = x^6 + 4x^3 + 4$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesi A, görüntü kümesi B olduğuna göre, A∩B kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-2, 2)$ B) $[-2, 0)$ C) $(2, \infty)$
D) $[-2, \infty)$ E) $[0, \infty)$

4) B 5) D 6) E

ADIM



2. Logaritma Fonksiyonu

$a > 0$ ve $a \neq 1$ olmak üzere,

$f: R^+ \rightarrow R$, $f(x) = \log_a x$

biçiminde tanımlanan f fonksiyonuna logaritma fonksiyonu denir.

Dikkat edilirse logaritma fonksiyonunun tanım kümesi R^+ (pozitif gerçek sayılar) dır. Negatif tamsayıların ve sıfırın logaritması tanımsızdır.

ADIM PEKİŞTİRME

ÖRNEK 1

$f(x) = \log_3(9 - x^2)$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesi nedir?

Çözüm

Logaritma fonksiyonunun yukarıda adımda verdiğimiz tanımından dolayı $9 - x^2 > 0$ olmalıdır.

O halde,

$$9 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 9$$

$$\Rightarrow -3 < x < 3 \text{ olur.}$$

Buna göre, f(x) fonksiyonunun en geniş tanım kümesi (–3, 3) aralığıdır.

ÖRNEK 2

$f(x) = \log_x(5 - x)$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesi nedir?

Çözüm

Logaritma fonksiyonunun tanımı nedeniyle $\log_x(5 - x)$ ifadesinde tabanda yer alan x, pozitif ve 1 den farklı bir gerçek sayı olmalıdır.

Ayrıca yine tanım nedeniyle $5 - x > 0$ olmalıdır. Buna göre,

$$5 - x > 0 \Rightarrow x < 5$$

$$x > 0 \text{ ve } x \neq 1$$

olacağından f in en geniş tanım kümesi $(0, 5) - \{1\}$ şeklindedir.

ÖRNEK 3

$f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesi nedir?

Çözüm

Logaritma fonksiyonunun tanımı nedeniyle

$x^2 + x + 1 > 0$ olmalıdır.

HATIRLATMA !

$ax^2 + bx + c$

ifadesinin her x gerçek sayısı için pozitif olabilmesi için $\Delta < 0$ ve $a > 0$ olmalıdır.

Hatırlatmada verilen bilgiyi kullanalım.

$x^2 + x + 1$ ifadesinde

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4.1.1 = -3$

olduğundan $\Delta < 0$ dır.

x^2 nin katsayısı pozitif yani $a > 0$ dır.

Buna göre, $x^2 + x + 1$ ifadesi her x gerçek sayısı için pozitiftir.

O halde f fonksiyonunun en geniş tanım kümesi R gerçek sayılar kümesidir.

ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

1. $f(x) = \log(x^2 - 6x)$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(0, 6)$ B) $(0, 6]$ C) $(0, \infty)$ D) $R - [0, 6]$ E) R

2. $f(x) = \log x + \log(x^2 - 1)$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(0, \infty)$ B) $(-1, 1)$ C) $(0, 1)$ D) $(-\infty, 1)$ E) $(1, \infty)$

3. I. $f(x) = \log_x 2$

II. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

III. $f(x) = 1 + \log x^2$

Yukarıda verilen fonksiyonlardan hangisinin en geniş tanım kümesi R gerçek sayılar kümesidir?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III D) I ve II E) II ve III

4. $f(x) = \ln\left(\frac{x-2}{x}\right)^2$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(0, 2)$ B) $(2, \infty)$ C) $R - \{0, 2\}$ D) $R - (0, 2)$ E) R

5. $f(x) = \log_x\left(\frac{4 - x^2}{x + 2}\right)$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-2, 0)$ B) $(0, 2)$ C) $(-2, 2)$ D) $(0, 2) - \{1\}$ E) $(-2, 2) - \{1\}$

6. $f(x) = \ln x$

$g(x) = \log(2 - x)$

olduğuna göre, (fog)(x) fonksiyonunun en geniş tanım kümesi nedir?

A) $(-2, 0)$ B) $(-2, 2)$ C) $(0, 2)$ D) $(-\infty, 1)$ E) $(0, 1)$

1) D 2) E 3) B 4) C 5) D 6) D

AFOEMİ

ADIM



3. Tek ya da Çift Dereceden Köklü Fonksiyonlar

- n pozitif tamsayı olmak üzere,
  $f(x) = \sqrt[2n]{g(x)}$
  biçiminde bir fonksiyon $g(x) \geq 0$ şartını sağlayan her x değeri için tanımlıdır.

- $f(x) = \sqrt[2n-1]{g(x)}$
  biçimindeki bir fonksiyon g(x) i tanımlı yapan her x değeri için tanımlıdır.

ADIM PEKİŞTİRME

ÖRNEK 1

$f(x) = \sqrt{x^3 - 5x^2 - 6x}$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesi nedir?

Çözüm

Fonksiyon denkleminde kökün derecesi çift olduğundan

$x^3 - 5x^2 - 6x \geq 0$ olmalıdır.

$x^3 - 5x^2 - 6x \geq 0 \Rightarrow x(x^2 - 5x - 6) \geq 0$

$x(x - 6)(x + 1) \geq 0$

Tablo incelemesi yaparak uygun aralığı bulalım.

		−1		0		6	
x	−		+		−		+

Buna göre,

f fonksiyonunun en geniş tanım aralığı

$[-1, 0] \cup [6, \infty)$ olur.

ÖRNEK 2

$f(x) = \sqrt[3]{\log(\sqrt{x} - 1)}$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesi nedir?

Çözüm

Fonksiyon denkleminde en dıştaki kökün derecesi tektir. Bu durumda içerideki ifadeyi yani $\log(\sqrt{x} - 1)$ ifadesini tanımlı yapan her x değerini bulmalıyız.

$\log(\sqrt{x} - 1)$ ifadesinin tanımlı olabilmesi için

$\sqrt{x} - 1 > 0$

$\sqrt{x} > 1$ her iki tarafın karesi alınırsa

$x > 1$ olmalıdır.

Buna göre,

f fonksiyonunun en geniş tanım kümesi $(1, \infty)$ aralığıdır.

APOTEMİ

ÖRNEK 3

$f(x) = \sqrt[4]{|x| - 4} + \sqrt[5]{\ln x}$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesi nedir?

Çözüm

Fonksiyon iki köklü ifadenin toplamından oluşmaktadır. Tanım kümesini bulurken her iki köklü ifadenin de durumu incelenmelidir.

(1) $\sqrt[4]{|x| - 4}$ ifadesinde

$|x| - 4 \geq 0 \Rightarrow |x| \geq 4$

$\Rightarrow x \geq 4$ veya $x \leq -4$ olur.

(2) $\sqrt[5]{\ln x}$

ifadesinde lnx in tanımlı olması için $x > 0$ olmalıdır.

Buna göre,

(1) ve (2) deki sonuçların her ikisini de sağlayan x değerleri $4 \leq x$ koşulunu sağlamaktadır.

O halde

f in en geniş tanım kümesi $[4, \infty)$ aralığıdır.

ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

1. k bir gerçel sayı, $A \subset R$ ve $f: A \to R$ olmak üzere,

$f(x) = \sqrt{6-k} + \sqrt[6]{k-6} + k$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, $f(6^6)$ kaçtır?

A) 6^6 B) 6^5 C) 6 D) $6^3 + 12$ E) $6^4 + 12$

2. $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesi A, görüntü kümesi f(A) olduğuna göre, $A \cap f(A)$ kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) [–3, 3] B) [–3, 0] C) [–9, 9] D) [0, 3] E) [0, 9]

3. $f(x) = \sqrt{1 - \log_x(8-x)}$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) (1, 8) B) (1, 4] C) (4, 8) D) (0, 4] – {1} E) [4, 8)

4. $f(x) = \sqrt[4]{3-|x-2|}$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesinin en büyük elemanı kaçtır?

A) 3 B) $\frac{9}{2}$ C) 5 D) $\frac{13}{2}$ E) $\frac{16}{3}$

5. $f(x) = \sqrt[3]{x - \sqrt{\ln x}}$ fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, aşağıdakilerden hangisi fonksiyon tanım kümesinin bir elemanı <u>olamaz</u>?

A) $\frac{7}{2}$ B) $\frac{5}{2}$ C) 2 D) 1 E) $\frac{1}{3}$

6. $f(x) = \sqrt{x^3-1}$ fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, $f^{-1}(x)$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) (–∞, 0) B) [0, ∞) C) (–∞, ∞) D) (1, ∞) E) $[\sqrt[3]{2}, \infty)$

1) C 2) D 3) E 4) C 5) E 6) B

APOTEMI

ADIM



4. Rasyonel Fonksiyonların Tanım Kümesi

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

şeklindeki rasyonel fonksiyonların en geniş tanım kümesi bulunurken

- g(x) in tanımlı olduğu aralık
- h(x) in tanımlı ve sıfırdan farklı olduğu aralık

bulunur ve her iki durumun kesişimi f in en geniş tanım kümesini verir.

ADIM PEKİŞTİRME

ÖRNEK 1

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{x^2-1}$$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesi nedir?

Çözüm

Fonksiyon denkleminde pay ve paydada yer alan ifadeleri inceleyelim.

- $\sqrt{x}+1$ ifadesi $x \geq 0$ için tanımlıdır.
- $x^2 - 1$ ifadesi her x için tanımlıdır. Ancak paydada yer aldığından

  $x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 1$

  $\Rightarrow x \neq \pm 1$ olmalıdır.

Yukarıda incelediğimiz iki durumun kesişimi f in en geniş tanım kümesini oluşturacaktır.

$$\{x \geq 0\} \cap \{x \neq \pm 1\} = [0, \infty) - \{1\}$$

olduğundan

f in en geniş tanım kümesi $[0, \infty) - \{1\}$ aralığıdır.

ÖRNEK 2

$$f(x) = \frac{\ln(2-x)}{\sqrt{x}-1}$$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesi nedir?

Çözüm

Pay ve paydada yer alan ifadeleri inceleyelim.

- $\ln(2-x)$ ifadesinde

  $2 - x > 0 \Rightarrow 2 > x$ olmalıdır.

- $\sqrt{x}-1$ ifadesinde

  $x \geq 0$ ve

  $\sqrt{x} - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$ olmalıdır.

Her iki durumun kesişimi f in en geniş tanım kümesini oluşturacaktır.

$$\{2 > x\} \cap \{x \geq 0 ,\ x \neq 1\} = [0, 2) - \{1\}$$

olduğundan

f in en geniş tanım kümesi $[0, 2) - \{1\}$ aralığıdır.

ÖRNEK 3

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2 - mx + 9}$$

fonksiyonu her x gerçek sayısı için tanımlı olduğuna göre, m nin alabileceği değerlerin aralığı nedir?

Çözüm

f, her x gerçek sayısı için tanımlı olduğuna göre, paydada yer alan ifade sıfırdan farklı olmalıdır.

HATIRLATMA !

$ax^2 + bx + c \neq 0$

koşulu her x gerçek sayısı için sağlanıyorsa

$\Delta = b^2 - 4ac < 0$ olmalıdır.

$x^2 - mx + 9 \neq 0$ olması gerektiğine göre,

$$\Delta = (-m)^2 - 4.1.9 < 0$$

$$m^2 - 36 < 0$$

$$m^2 < 36$$

$$-6 < m < 6 \text{ elde edilir.}$$

ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

1. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[4]{9-x^2}}$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) (–3, 3) B) (–1, 3) C) (–3, 1] D) (1, 3) E) [1, 3)

2. $f(x)=2^{\frac{\sqrt{1-\ln x}}{x-2}}$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) (2, e] B) (0, e] – {2} C) (0, e) – {2} D) (e, ∞) E) (–∞, e] – {2}

3. $f(x)=\dfrac{x+1}{3x^2+(m-1)x+3}$

fonksiyonu her x gerçek sayısı için tanımlı olduğuna göre, m nin alabileceği kaç farklı tamsayı değeri vardır?

A) 12 B) 11 C) 10 D) 9 E) 8

1) E 2) B 3) B

4. f: R – {0} → R olmak üzere,

$f(x)=\dfrac{6}{x}-x+1$

biçiminde bir f fonksiyonu tanımlanıyor.

Buna göre, f(x) ∈ (0, ∞) şartına uyan x lerin kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) (–2, 3) B) (–3, 2) C) (0, 3) D) (–2, 0) ∪ (3, ∞) E) (–∞, –2) ∪ (0, 3)

5. $f(x)=\sqrt{x}+1$

$g(x)=\ln x$

fonksiyonları veriliyor.

Buna göre, $h(x)=\dfrac{f(2-x)}{(fog)(x)}$ **fonksiyonunun en geniş tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) (0, 1] B) (0, 2] C) (–∞, 2) D) [1, 2] E) [2, ∞)

6. A, f fonksiyonunun en geniş tanım kümesi olmak üzere,

f: A → B

$f(x)=|3-x|-\dfrac{x^2-9}{|x-3|}$

biçiminde tanımlanan f fonksiyonu örten olduğuna göre, B kümesinin eleman sayısı kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 6 D) 7 E) 9

4) E 5) D 6) A

ADIM



ARTAN VE AZALAN FONKSİYONLAR

$A \subset R$ olmak üzere,

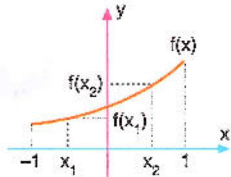
$f: A \to B$ biçiminde tanımlı f fonksiyonunda

her $x_1, x_2 \in A$ için $x_1 < x_2$ iken

- $f(x_1) < f(x_2)$ ise f artan fonksiyondur. Eğer aradaki işaret $\leq$ biçiminde olursa f e azalmayan fonksiyon denir.
- $f(x_1) > f(x_2)$ ise f azalan fonksiyondur. Eğer aradaki işaret $\geq$ biçiminde olursa f e artmayan fonksiyon denir.
- $f(x_1) = f(x_2)$ ise f sabit fonksiyondur.

ÖRNEK 1

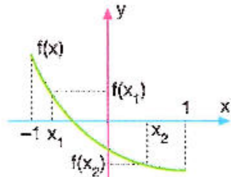
$[-1, 1] \to R$ ye tanımlı f, g ve h fonksiyonlarının grafikleri aşağıdaki gibi olsun.



$x_1 < x_2$ için

$f(x_1) < f(x_2)$

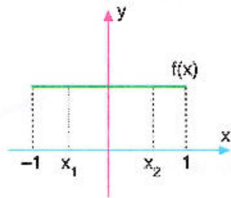
f artandır.



$x_1 < x_2$ için

$f(x_1) > f(x_2)$

f azalandır.



$x_1 < x_2$ için

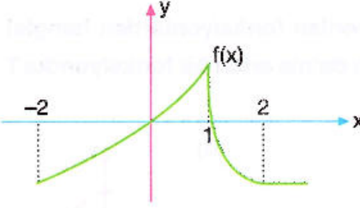
$f(x_1) = f(x_2)$

f sabit fonksiyondur.

DİKKAT !

Bir fonksiyon tanımlı olduğu aralıkta, bazen artan, bazen azalan bazen de sabit olabilir.

ÖRNEK 2



Yukarıda grafiği verilen f fonksiyonu $[-2, 1]$ aralığında artan, $[1, 2]$ aralığında azalan, $[2, \infty)$ aralığında sabit fonksiyondur.

ADIM PEKİŞTİRME

ÖRNEK 1

I. $f(x) = x + 1$

II. $g(x) = x^2$

III. $h(x) = 2^x$

fonksiyonlarından hangileri R den R ye tanımlı daima artan bir fonksiyondur?

Çözüm

$x_1, x_2 \in R$ olmak üzere, $x_1 < x_2$ olsun.

I. $f(x_1) = x_1 + 1$

$f(x_2) = x_2 + 1$

$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1$ olduğundan f artandır.

II. $g(x_1) = x_1^2$

$g(x_2) = x_2^2$

$x_1 < x_2$ iken $x_1^2 < x_2^2$ olmak zorunda değildir.

Örneğin $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ için $-1 < 1$ iken $(-1)^2 = (1)^2$ olur. Bu nedenle belirtilen aralıkta g daima artan değildir.

III. $h(x_1) = 2^{x_1}$

$h(x_2) = 2^{x_2}$

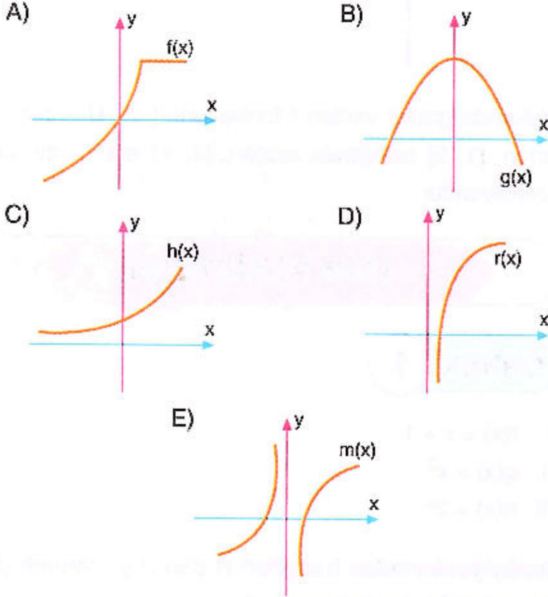
$x_1 < x_2$ iken $2^{x_1} < 2^{x_2}$ olduğundan h daima artandır.

DİKKAT !

Fonksiyonların artan ya da azalan oldukları aralıkların belirlenmesi, fonksiyonun türevi incelenerek daha kolay bulunabilmektedir. Bu nedenle bu adımda bu kadar bilgi ile yetinilip kalanı türev kitabımızda anlatılmıştır.

ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

1. Aşağıda grafiği verilen fonksiyonlardan hangisi R den R ye tanımlı daima artan bir fonksiyondur?



2. f: [–1, 1] → R

f(x) = (m – 1).x + 1

biçiminde tanımlı bir f fonksiyonunun daima artan olduğu bilindiğine göre, m aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $-\frac{3}{2}$ B) –1 C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) 2

3. Aşağıda verilen fonksiyonlardan hangileri tanımlı oldukları en geniş aralıkta daima azalandır?

I. $f(x) = -\sqrt{x}$

II. $f(x) = x^2 - x - 6$

III. f(x) = lnx

A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III D) I ve III E) I, II ve III

1) C 2) E 3) A

4. $f(x) = x^2 + mx + n$

fonksiyonu [–1, 1] aralığında daima artan olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi kesinlikle doğrudur?

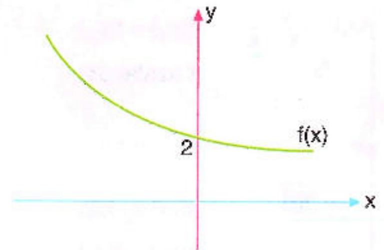
A) m > 0 B) m > 1 C) m ≥ 2 D) –1 < m < 1 E) 1 < m ≤ 2

5. $f(x) = \cos(x - 2\pi)$

fonksiyonu aşağıdaki aralıkların hangisinde tanımlanırsa daima azalan olur?

A) $(0, 2\pi)$ B) $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ C) $(\pi, 2\pi)$ D) $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ E) $\left(\frac{5\pi}{2}, 3\pi\right)$

6.



Yukarıda f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, aşağıdaki fonksiyonlardan hangisi daima artandır?

A) f(x – 2) B) f(x + 2) C) f(x) + 1 D) $f^{-1}(x) + 1$ E) –f(x)

4) C 5) E 6) E

ADIM



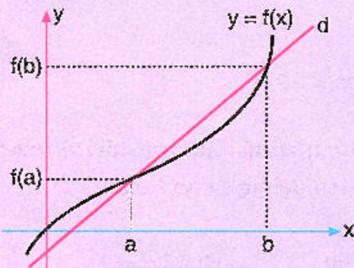
BİR FONKSİYONUN ORTALAMA DEĞİŞİM ORANI (HIZI)

Bir f fonksiyonunun [a, b] aralığında x'e bağlı olarak ortalama değişim oranı (hızı)

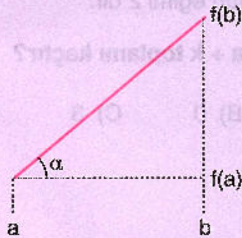
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

oranı ile elde edilir.

Ortalama değişim oranını grafik üzerinde gösterelim.



Grafikte verilen f(x) fonksiyonunun [a, b] aralığındaki ortalama değişim oranı (hızı), aynı zamanda fonksiyonu kesen d doğrusunun eğimine eşittir.



$$\text{Egim: } \tan\alpha = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

ADIM PEKİŞTİRME

ÖRNEK 1

$f(x) = x^5 - x^2 + 1$

fonksiyonunun [–1, 2] aralığındaki ortalama değişim hızını bulunuz.

Çözüm

Ortalama değişim hızı: $\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}$

$f(2) = 2^5 - 2^2 + 1 = 29$

$f(-1) = (-1)^5 - (-1)^2 + 1 = -1$ olduğuna göre,

Değişim hızı: $\frac{29-(-1)}{3} = 10$ bulunur.

ÖRNEK 2

Bir şehirde yeni açılan bir üniversiteye o şehirde yaşayan öğrencilerden kayıt yaptıran sayısı bazı yıllarda şu şekilde gerçekleşmiştir.

Açılışın 1. Yılı	Açılışın 7. Yılı
350	572

Buna göre, 1. ve 7. yıllar arasında bu üniversiteye kayıt yaptıran öğrenci sayısının ortalama değişim hızını bulunuz.

Çözüm

Belirtilen yıllar arasında öğrenci sayısındaki ortalama değişim hızı:

$\frac{f(7)-f(1)}{7-1} = \frac{572-350}{6} = 37$ bulunur.

ÖRNEK 3

Harekete geçen bir cismin t dakika sonra aldığı yol $f(t) = t^3 - 3t^2 + 4t$ metre olduğuna göre, cismin harekete geçtiği ilk 4 dakikalık sürede, başladığı noktaya uzaklığının ortalama değişim hızını bulunuz.

Çözüm

Cismin [0, 4] aralığındaki ortalama değişim hızı:

$\frac{f(4)-f(0)}{4-0} = \frac{32-0}{4} = 8$ m/dak bulunur.

ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

1. $a \neq 0$ olmak üzere,

$f(x) = x^2 - 1$

fonksiyonunun [–a, a] aralığındaki ortalama değişim hızı kaçtır?

A) $\frac{a}{2}$ B) $\frac{1}{a}$ C) $\frac{1}{2a}$ D) 1 E) 0

2. $F(x) = x^4 - x$

fonksiyonunun aşağıdaki aralıklardan hangisinde ortalama değişim hızı –1 dir?

A) [–2, 0] B) [–1, 0] C) [–1, 1] D) [–2, 1] E) [0, 1]

3. **Havaya atılan bir diskin t saniye sonra yerden yüksekliğini ifade eden fonksiyon $h(t) = -t^2 + 10t$ olduğuna göre, diskin 2. ve 6. saniyeler arasında yerden yüksekliğinin ortalama artış hızı kaç m/sn dir?**

A) 1 B) 2 C) $\frac{5}{2}$ D) 3 E) 4

1) E 2) C 3) B

4. 2015 yılında 1020 çocuğun anaokuluna başladığı bir şehirde, anaokuluna başlayan çocuk sayısının ortalama değişim hızının 180 olduğu bilinmektedir.

Bu verilere göre, bu şehirde 2012 yılında anaokuluna başlayan çocuk sayısı kaçtır?

A) 720 B) 600 C) 540 D) 480 E) 450

5. $f(x) = x^2 + k$ fonksiyonu ile ilgili şunlar bilinmektedir.

- Bir d doğrusu, f in grafiğini apsisi x = 0 ve x = a olan iki farklı noktada kesmektedir.
- f in [0, a] aralığındaki ortalama değişim oranı k, d doğrusunun eğimi 2 dir.

Buna göre, a + k toplamı kaçtır?

A) –2 B) 0 C) 3 D) 4 E) 6

4) D 5) D

APOTEMİ

ADIM



PARÇALI FONKSİYON

Tanım kümesinin birbirinden ayrık alt kümelerinde, farklı kurallarla tanımlanmış olan fonksiyonlara **parçalı fonksiyon** denir.

Örneğin;

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & , x\le 1\\ x & , x>1\end{cases}$$

biçiminde gösterilmiş olan f fonksiyonu R den R ye tanımlı bir parçalı fonksiyondur.

Parçalı fonksiyonda, alt aralıkların uç noktalarına **kritik noktalar** denir.

Yukarıdaki örneğimizde f in kritik noktası 1 dir.

ADIM PEKİŞTİRME

ÖRNEK 1

$$f(x)=\begin{cases}x & , x\le 0\\ x^2 & . \ 0<x\le 1\\ x+2 & , \ 1<x\end{cases}$$

biçiminde tanımlı bir f fonksiyonu veriliyor.

$f(a) + f(-1) = f(6)$

olduğuna göre, a kaçtır?

Çözüm

f parçalı fonksiyonunun x = 0 ve x = 1 de kritik noktası vardır.

Parçalı olarak verilen f fonksiyonuna bakılarak

f(–1) ve f(6) kolayca bulunabilir.

$x \le 0$ için $\quad f(x) = x \quad \Rightarrow f(-1) = -1$

$1 < x$ için $\quad f(x) = x + 2 \Rightarrow f(6) = 8$

O halde

$f(a) - 1 = 8 \Rightarrow f(a) = 9$ elde edilir.

Şimdi f(a) = 9 eşitliğini sağlayan a değerlerini bulmaya çalışalım.

- $a \le 0$ olsaydı $f(a) = a \le 0$ olurdu.

  Bu durumda f(a) = 9 sağlayan bir a bulunamaz.

- $0 < a \le 1$ olsaydı $f(a) = a^2$ olurdu.

  $0 < a \le 1$ ise $0 < a^2 \le 1$ dir.

  Bu durumda f(a) = 9 sağlayan bir a bulunamaz.

- $1 < a$ olursa $f(a) = a + 2$ olur.

  Bu durumda

  $f(a) = 9 = a + 2 \Rightarrow a = 7$ bulunur.

ÖRNEK 2

$$f(x+2)=\begin{cases}x-1 & , \ x<1\\ 2x & , \ x\ge 1\end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, f(–x) fonksiyonu neye eşittir?

Çözüm

Öncelikle f(x + 2) yi f(–x) e çevirmeliyiz.

Bu işlemi gerçekleştirebilmek için

$x + 2 = -y$ olarak alırsak $x = -y - 2$ olur.

O halde

f(x + 2) fonksiyonunda x yerine her yerde –x – 2 yazalım.

$$f(-x-2+2)=\begin{cases}-x-2-1 & , \ -x-2<1\\ 2(-x-2) & , \ -x-2\ge 1\end{cases}$$

$$f(-x)=\begin{cases}-x-3 & , \ -x<3\\ -2x-4 & , \ -x\ge 3\end{cases}$$

$$f(-x)=\begin{cases}-x-3 & , \ x>-3\\ -2x-4 & , \ x\le -3\end{cases}$$

elde edilir.

ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

1. $f(x)=\begin{cases} x+2 & x\geq 1 \\ 3-x & x<1 \end{cases}$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, f(1 + f(–1)) ifadesinin değeri kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 7

2. $f(3-x)=\begin{cases} 2x & x\geq 0 \\ x+1 & x<0 \end{cases}$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, f(a) = 4 koşulunu sağlayan a değeri kaçtır?

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 3

3. $f(x)=\begin{cases} 2x & x\leq 0 \\ x+1 & 0<x\leq 2 \\ x^2-6 & 2<x \end{cases}$

olduğuna göre, f(k) = 3 koşulunu sağlayan k değerlerinin toplamı kaçtır?

A) 11 B) 5 C) 3 D) 2 E) –4

1) E 2) D 3) B

4. $f\left(\frac{x-1}{2}\right)=\begin{cases} 2x & x<1 \\ x+1 & x\geq 1 \end{cases}$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, f(2x) fonksiyonu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\begin{cases} 4x & x<0 \\ 4x+1 & x\geq 0 \end{cases}$ B) $\begin{cases} 4x+2 & x<0 \\ 4x+1 & x\geq 0 \end{cases}$

C) $\begin{cases} 8x & x<1 \\ 8x+2 & x\geq 1 \end{cases}$ D) $\begin{cases} 8x+2 & x<0 \\ 4x+2 & x\geq 0 \end{cases}$

E) $\begin{cases} 8x & x<1 \\ 4x & x\geq 1 \end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases} -x+3 & ;\ x<1 \\ -2x+4 & ;\ x\geq 1 \end{cases}$

fonksiyonu veriliyor.

f(f(a)) = –2

olduğuna göre, a kaçtır?

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

4) D 5) C

APOEMI

6. $f(x)=\begin{cases}5-x & ; x\geq 2\\ 2x & ; x<2\end{cases}$

fonksiyonu veriliyor.

a ≠ 1 olmak üzere,

f(a) = f(1)

eşitliğini sağlayan a sayısı aşağıdaki aralıklardan hangisinde yer alır?

A) $(-\infty, 0)$ B) (0, 1) C) (0, 2) D) (2, 4) E) $(5, \infty)$

7. $f(x)=\begin{cases}ax+2 & ; x>0\\ 3x-b & ; x<0\end{cases}$

biçiminde tanımlı f, çift fonksiyon olduğuna göre, f(a – b) değeri kaçtır?

A) –5 B) –3 C) –1 D) 1 E) 5

8. $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\geq 0\\ x & x<0\end{cases}$ ve $g(x)=\begin{cases}x+1 & x\geq 0\\ -x^2 & x<0\end{cases}$

fonksiyonları veriliyor.

Buna göre, f(a) + f(a – 2) = g(a) eşitliğini sağlayan <u>en büyük</u> a sayısı kaçtır?

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 2 D) $\frac{5}{2}$ E) 4

9. $f(x)=\begin{cases}3x & x\geq 1\\ x & x<1\end{cases}$ ve $g(x)=\begin{cases}x+2 & x\geq 2\\ 2x & x<2\end{cases}$

fonksiyonları veriliyor.

Buna göre,

I. x < 2 için f(x – 1) = 3x

II. x ≥ –2 için g(–x) = –2x

III. 1 ≤ x < 2 için $f\left(\frac{x}{3}\right)=x$

ifadelerinden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III D) I ve III E) I, II ve III

10. $f(x)=\begin{cases}x & x\leq 1\\ 1-x & x>1\end{cases}$ ve $g(x)=\begin{cases}x+1 & x<-1\\ x+2 & x\geq -1\end{cases}$

fonksiyonları veriliyor.

a∈[–1, 0] olduğuna göre, f(a + 2) + g(–a) aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) 2a – 1 B) 1 – 2a C) –a – 1 D) 2a E) 4

11. $f(x+1)=\begin{cases}x+2 & x\geq a\\ x^2 & x<a\end{cases}$

fonksiyonu veriliyor.

f(–1) = 4 olduğuna göre, a nın alabileceği değerlerin oluşturduğu aralık aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\infty, -1]$ B) [–1, 0] C) [–2, –1] D) $(-2, \infty)$ E) $[-1, \infty)$

6) D 7) C 8) B 9) B 10) B 11) D

DİKKAT !

Bu sayfadaki konu anlatımı Fen Lisesi müfredatında yer almaktadır. Anadolu ve diğer liselerde okuyan öğrencilerimiz bu sayfayı ardındaki testi geçebilir.

PARÇALI FONKSİYONUN TERSİ

$$f(x)=\begin{cases} g(x) & , \ x<k \\ h(x) & , \ x \geq k \end{cases}$$

biçiminde verilen bir parçalı fonksiyonun tersinin var olabilmesi için g(x) ve h(x) in tanımlandıkları aralıklarda bire bir ve örten olmaları gerekir.

Ayrıca g(k) = h(k) eşitliği sağlanmalıdır. Eğer bu eşitlik sağlanmazsa f in bire bir ve örten olma şartı yerine gelmeyecektir.

Şimdi yukarıda verdiğimiz f(x) parçalı fonksiyonunun tersini yazalım.

$$f^{-1}(x)=\begin{cases} g^{-1}(x) & , \ x<g(k) \\ h^{-1}(x) & , \ x \geq h(k) \end{cases}$$

Dikkat edilirse f in tersi bulunurken g ve h ın tersleri ayrı ayrı bulundu. Ayrıca sınırlar g ve h yardımıyla düzenlendi.

ÖRNEK 3

$$f(x)=\begin{cases} 2x-1 & , \ x \geq 0 \\ x-1 & , \ x<0 \end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, $f^{-1}(4)$ kaçtır?

Çözüm

Bu soruda f^{-1} de değer sorulduğundan parçalı fonksiyonunun tersini bulmadan çözüm yapılabilir.

Tersi var olan bir fonksiyonda $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$ olduğundan $f^{-1}(4) = x \Leftrightarrow f(x) = 4$ olur.

Şimdi x i bulmaya çalışalım. Fonksiyon incelenirse

$x < 0$ için $f(x) = 4$ eşitliğinin sağlanmadığı görülecektir.

$x \geq 0$ için $f(x) = 2x - 1$ olduğuna göre,

$f(x) = 2x - 1 = 4 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$ olur.

O halde $f^{-1}(4) = x \Rightarrow f^{-1}(4) = \frac{5}{2}$ bulunur.

ÖRNEK 4

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x+3}{2} & , \ x>1 \\ 3x-1 & , \ x \leqslant 1 \end{cases}$$

fonksiyonunun tersi neye eşittir?

Çözüm

Anlatımda kolaylık olması için

$g(x) = \frac{x+3}{2}$ ve $h(x) = 3x - 1$ olarak adlandırma yapalım.

$x > 1$ için g(x) bire bir ve örtendir.

$x \leq 1$ için h(x) bire bir ve örtendir.

Ayrıca $x = 1$ için $g(1) = h(1) =$ dir.

O halde soruda verilen f fonksiyonu bire bir ve örten olduğundan tersi bulunabilir.

$$f^{-1}(x)=\begin{cases} g^{-1}(x) & , \ x>g(1) \\ h^{-1}(x) & , \ x \leqslant h(1) \end{cases}$$

$g^{-1}(x) = 2x - 3$ ve $h^{-1}(x) = \frac{x+1}{3}$

olduğundan

$$f^{-1}(x)=\begin{cases} 2x-3 & , \ x>2 \\ \frac{x+1}{3} & , \ x \leqslant 2 \end{cases}$$

bulunur.

ÖRNEK 5

$$f(x)=\begin{cases} x+a & , \ x \geq 2 \\ 3ax & , \ x<2 \end{cases}$$

fonksiyonunun tersi de fonksiyon olduğuna göre, a kaçtır?

Çözüm

f in tersi de fonksiyon olduğuna göre f bire bir ve örten olmalıdır.

O halde $x = 2$ için $x + a$ ve $3ax$ birbirine eşit olmalıdır.

$2 + a = 6a \Rightarrow 5a = 2$

$\Rightarrow a = \frac{2}{5}$ bulunur.

ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

1. $f(x)=\begin{cases}2x-1 & x\geq 2\\ 3x-3 & x<2\end{cases}$

olduğuna göre, $f^{-1}(0)$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) –3 B) 0 C) 1 D) 4 E) 7

2. $f(x)=x^3+7$ ve

$g(x)=\begin{cases}2x-2 & x\geq 0\\ x-2 & x<0\end{cases}$

fonksiyonları veriliyor.

$f^{-1}(-1)=g^{-1}(a)$ olduğuna göre, a kaçtır?

A) –4 B) –3 C) –1 D) 2 E) 5

3. f^{-1}, f fonksiyonunun tersi olmak üzere,

$f(x)=\begin{cases}x-b & x<1\\ 2ax+b & x\geq 1\end{cases}$

fonksiyonu veriliyor.

$f^{-1}(2)=1$ olduğuna göre, a.b kaçtır?

A) $-\frac{3}{2}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) 0 D) 1 E) $\frac{4}{3}$

1) C 2) A 3) A

4. $f(x)=\begin{cases}2x-2 & x\geq 2\\ x & x<2\end{cases}$

olduğuna göre, $(f^{-1})(2x)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\begin{cases}\frac{x+2}{2} & x\geq 2\\ 4-x & x<2\end{cases}$

B) $\begin{cases}x+1 & x\geq 2\\ 2x & x<2\end{cases}$

C) $\begin{cases}x+1 & x\geq 1\\ 2x & x<1\end{cases}$

D) $\begin{cases}2x & x\geq 1\\ x+1 & x<1\end{cases}$

E) $\begin{cases}2x-2 & x\geq 1\\ x+1 & x<1\end{cases}$

5. **f : R → R olmak üzere,**

$f(x)=\begin{cases}2x+3 & x\geq 2\\ x+5 & x<2\end{cases}$

olduğuna göre, $(f^{-1})(2x+3)$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\begin{cases}x & x\geq 2\\ 2x-2 & x<2\end{cases}$

B) $\begin{cases}x-3 & x\geq 7\\ x+5 & x<7\end{cases}$

C) $\begin{cases}x+1 & x\geq 3\\ 2-x & x<3\end{cases}$

D) $\begin{cases}x-5 & x\geq 2\\ 2x & x<2\end{cases}$

E) $\begin{cases}x & x\geq 7\\ 2x-2 & x<7\end{cases}$

4) C 5) A

ADIM



MUTLAK DEĞER FONKSİYONU

$f: A \to B$ olmak üzere,

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & f(x) \geq 0 \\ -f(x) & f(x) < 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $|f(x)|$ fonksiyonu **mutlak değer** fonksiyonudur.

Mutlak değerli fonksiyonları parçalı fonksiyon biçiminde yazmadan önce kritik noktalar belirlenmelidir. Mutlak değerli bir fonksiyonun kritik noktaları mutlak değerin içini sıfır yapan noktalardır. Fonksiyon, bu kritik noktalara bakılarak parçalı hale getirilir.

ADIM PEKİŞTİRME

ÖRNEK 1

$f(x) = |x - 4| + x + 1$

fonksiyonunun parçalı fonksiyon biçiminde yazılışı nedir?

Çözüm

Verilen fonksiyonun parçalı fonksiyon biçiminde yazılabilmesi için fonksiyon denkleminde yer alan mutlak değerli ifadenin yani $|x - 4|$ ün kritik noktası belirlenmelidir.

$|x - 4| = 0 \Rightarrow x = 4$ mutlak değerli ifadenin kritik noktasıdır.

Şimdi kritik noktaya göre işaret incelemesi yaparak fonksiyonu parçalı hale getirelim.

x		4	
f(x)	$\underbrace{-x+4+x+1}_{5}$		$\underbrace{x-4+x+1}_{2x-3}$

O halde $f(x) = \begin{cases} 2x-3 & , \quad x \geq 4 \\ 5 & , \quad x < 4 \end{cases}$

NOT: Mutlak değerli bu türden fonksiyonları parçalı biçimde yazarken sınırlara konulan eşitlik ($\leq$ ve $\geq$) sembolünün yukarıda ya da aşağıda yer alması f i değiştirmez.

ÖRNEK 2

$f(x) = |x - 2| - |x + 1|$

fonksiyonunu parçalı fonksiyon biçiminde yazınız.

Çözüm

Denklemde $|x - 2|$ ve $|x + 1|$ mutlak değerli iki ifade yer aldığından bu iki ifadenin kritik noktalarına göre fonksiyonu inceleyelim.

$|x - 2| = 0 \Rightarrow x = 2$ ve $|x + 1| = 0 \Rightarrow x = -1$ bulunur.

$x = 2$ ve $x = -1$, f in kritik noktalarıdır.

x		−1		2	
f(x)	$\underbrace{-(x-2)+(x+1)}_{3}$		$\underbrace{-(x-2)-(x+1)}_{-2x+1}$		$\underbrace{(x-2)-(x+1)}_{-3}$

O halde

$$f(x) = \begin{cases} 3 & x < -1 \\ -2x+1 & -1 \leq x < 2 \\ -3 & 2 \leq x \end{cases}$$

ÖRNEK 3

$f(x) = |x - 2|$ ve $g(x) = |x| - 1$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, (fog)(x) = 3 eşitliğini sağlayan en küçük x değeri kaçtır?

Çözüm

$(fog)(x) = f(g(x)) = |g(x) - 2| = ||x| - 1 - 2| = 3$

$||x| - 3| = 3$ ise

$|x| - 3 = -3$ (*)

veya

$|x| - 3 = 3$ (**) olur.

$|x| - 3 = -3 \Rightarrow |x| = 0 \Rightarrow x = 0$ (*)

$|x| - 3 = 3 \Rightarrow |x| = 6 \Rightarrow x = 6$ veya $x = -6$ (**)

O halde (*) ve (**) daki sonuçlara göre, eşitliği sağlayan en küçük değer −6 dır.

ÖRNEK 4

f: R → R ve f(x) ≠ 0 olmak üzere,

$$f(x) = \frac{|f(x)|}{f(x)} - x^2 - 2$$

olduğuna göre, f(2) kaçtır?

Çözüm

Verilen eşitliğin sağ tarafında |f(x)| mutlak değerli ifadesini düzenleyerek öncelikle f(x) i bulmaya çalışalım.

- f(x) > 0 olursa |f(x)| = f(x) olur.

  $$f(x) = \frac{f(x)}{f(x)} - x^2 - 2 \Rightarrow f(x) = -x^2 - 1$$

  $-x^2 - 1$ ifadesi tüm reel sayılar için negatiftir. Ancak eşitliği düzenlerken f(x) > 0 almıştık. Bu çelişki nedeniyle f(x) > 0 olması mümkün değildir.

- f(x) < 0 olursa |f(x)| = –f(x) olur.

  $$f(x) = \frac{-f(x)}{f(x)} - x^2 - 2 \Rightarrow f(x) = -x^2 - 3$$

  $-x^2 - 3$ ifadesi tüm reel sayılar için negatiftir.
  O halde $f(x) = -x^2 - 3$ bulunur.
  Buna göre, f(2) = –4 – 3 = –7 bulunur.

ÖRNEK 5

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$
fonksiyonu veriliyor.

Her x reel sayısı için f(x) = f(|x|) olduğuna göre, a.b + b.c toplamı kaçtır?

Çözüm

$f(|x|) = a|x|^3 + b|x|^2 + c|x|$

f(x) = f(|x|) olduğuna göre,

$ax^3 + bx^2 + cx = a|x|^3 + b|x|^2 + c|x|$ olur.

$|x|^2 = x^2$ olduğuna göre,

$ax^3 + bx^2 + cx = a|x|^3 + bx^2 + c|x|$

$ax^3 + cx = a|x|^3 + c|x|$

Bu eşitliğin her x reel sayısı için sağlanabilmesi a = 0 ve c = 0 şartına bağlıdır.

Buna göre, a.b + b.c = 0 olur.

ÖRNEK 6

f(x) = |x – 2| + |2x – 1| + 1

fonksiyonunun alabileceği en küçük değer kaçtır?

Çözüm

Mutlak değerli bir ifadenin alabileceği en küçük değer sıfırdır. Soruda verilen f fonksiyonunun denkleminde iki farklı mutlak değerli ifade bulunmaktadır.

İki ifadeyi aynı anda sıfıra eşitleyen bir x değeri bulunamayacağından en küçük değeri bulmak için her bir mutlak değerli ifadenin içini sıfır yapan değerler kullanılarak f fonksiyonunun en küçük değeri bulunmaya çalışılır.

- $|x-2| = 0 \Rightarrow x = 2$ için

  $f(x) = 0 + 3 + 1 = 4$ olur.

- $|2x-1| = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ için

  $$f(x) = \left|\frac{1}{2} - 2\right| + 0 + 1$$

  $$f(x) = \left|-\frac{3}{2}\right| + 1 \Rightarrow f(x) = \frac{5}{2} \text{ olur.}$$

İki durum da incelendiğinde f fonksiyonunun alabileceği en küçük değer olarak $\frac{5}{2}$ bulunur.

ÖRNEK 7

f(x) = |x + 2| + |x – 4| fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, f(x) = 6 denklemini sağlayan x değerlerinin aralığı nedir?

Çözüm

Soru kritik noktalar kullanılarak f parçalı fonksiyon biçimine dönüştürülüp çözülebilir. Ancak bu sorunun çözümünde daha pratik bir yol kullanabiliriz.

PRATİK

$|x - a| + |x - b| = c \quad (c \geq 0)$
x = a ve x = b için denklem sağlanıyorsa $a \leq x \leq b$ aralığındaki tüm x ler denklemi sağlar.

Bu sonuç eşitliğin sol tarafı parçalı biçimde yazılırsa kolayca görülebilir.

O halde sorunun çözümünde pratik kuralı kullanırsak

f(x) = |x + 2| + |x – 4| = 6

x = –2 ve x = 4 için denklem sağlanıyor.

Buna göre, [–2, 4] aralığındaki tüm x değerleri için f(x) = 6 denklemi sağlanır.

ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

1. $f(x) = \big||x-2| - x\big|$ fonksiyonu veriliyor.

$f(-x) = 4$ denkleminin kaç farklı kökü vardır?

A) 6 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

2. $f(x) = |x-2|$

$g(x) = \big||x| - 1\big|$

fonksiyonları veriliyor.

Buna göre, $(fog)(x) = 1$ denkleminin <u>en küçük</u> kökü kaçtır?

A) −6 B) −5 C) −4 D) −2 E) 0

3. $f(x) = |x-3| - |x| - 2$ fonksiyonu için

I. $x < 0$ ise $f(x) = 1$ dir.

II. $x > 0$ ise $f(x) = -5$ tir.

III. $0 \le x \le 3$ aralığında f(x) in alabileceği 7 farklı tamsayı değeri vardır.

ifadelerinden hangileri <u>kesinlikle</u> doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III D) I ve III E) I, II ve III

4. $f(x) = \big|x - |x|\big| + 1$

fonksiyonu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $f(x) = \begin{cases} 2x & x \ge 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases}$

B) $f(x) = \begin{cases} 1 & x \ge 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases}$

C) $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \ge 0 \\ -2x+1 & x < 0 \end{cases}$

D) $f(x) = \begin{cases} 1 & x \ge 0 \\ 2x+1 & x < 0 \end{cases}$

E) $f(x) = \begin{cases} 1 & x \ge 0 \\ -2x+1 & x < 0 \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} x & x \ge 2 \\ 4-x & x < 2 \end{cases}$

olduğuna göre, f(x) aşağıdakilerden hangisine eşit olabilir?

A) $f(x) = \big||x| - 2\big|$

B) $f(x) = \big||x-2| - x\big|$

C) $f(x) = |x-2| + 2$

D) $f(x) = |x| - 2$

E) $f(x) = |x-2| - |x|$

6. $f: R \to R$ ve $f(x) \ne 1$ olmak üzere,

$$f(x) = \frac{|f(x)-1|}{f(x)-1} + x^2 + 2$$

olduğuna göre, f(−3) kaçtır?

A) 12 B) 10 C) $\frac{11}{2}$ D) 3 E) $\frac{3}{2}$

1) E 2) C 3) D 4) E 5) C 6) A

7. $f(x) = |x| + |x - 6|$

olduğuna göre, f(x + 1) = 6 denklemini sağlayan kaç farklı x tam sayısı vardır?

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

8. $x \in [-1, 3]$ olmak üzere,

$f(x) = x.|x| - 4x + 1$

fonksiyonunun alabileceği en küçük değer kaçtır?

A) –3 B) –2 C) –1 D) 0 E) 1

9. $f(x) = |x - |x - 1||$

fonksiyonu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $f(x) = \begin{cases} x & x \geq 1 \\ 1 & x < 1 \end{cases}$

B) $f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 1 \\ 2x - 1 & x < 1 \end{cases}$

C) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \frac{1}{2} \leq x \\ 1 - 2x & x < \frac{1}{2} \end{cases}$

D) $f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 1 \\ 2x - 1 & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 1 - 2x & x < \frac{1}{2} \end{cases}$

E) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x \geq 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 1 - 2x & x < \frac{1}{2} \end{cases}$

7) B 8) A 9) D

10. $x \in R - \{-3\}$ olmak üzere, bir f fonksiyonu

$f(x) = \frac{|x - 1| + 2}{x + 3}$

biçiminde tanımlanıyor.

Buna göre, [–1, 4) aralığının f fonksiyonu altındaki görüntü kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) (1, 2] B) [0, 2) C) [1, 2] D) $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ E) [2, 4]

11. $f(x) = |x - 2| + x$

$g(x) = |x + 3|$

fonksiyonları veriliyor.

$h(x) = \frac{1}{1 + (gof)(x)}$

olduğuna göre, h(x) in alabileceği en büyük değer kaçtır?

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{9}$

12. $f(x) = |x^2 - 4|$

$g(x) = ax + 4$

fonksiyonları veriliyor.

f(x) = g(x) denkleminin 3 farklı reel kökü olduğuna göre, a aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) 4 B) 1 C) $\frac{1}{2}$ D) –1 E) –2

10) D 11) D 12) E

ADIM



FONKSİYON GRAFİKLERİNİN ÇİZİMİ İÇİN GEREKLİ BAZI HATIRLATMALAR

Parçalı ve mutlak değerli fonksiyonların grafiklerinin çizimini anlatmadan önce sıkça kullandığımız bazı bilgileri hatırlayalım.

DOĞRUSAL FONKSİYONUN GRAFİĞİ

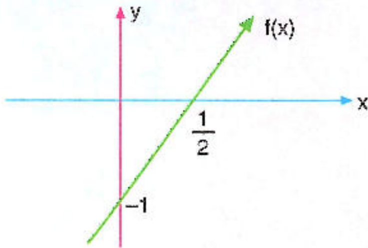
- $f(x) = ax + b$ biçimindeki fonksiyonlara doğrusal fonksiyon dendiğini daha önceki adımlarda anlatmıştık. Burada doğrusal fonksiyonun nasıl çizileceğini kısaca anlatacağız.

ÖRNEK 1

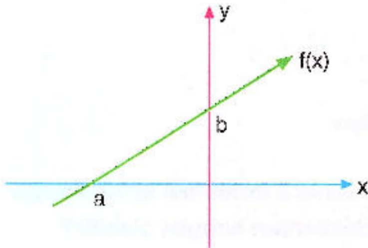
$y = f(x) = 2x - 1$ fonksiyonunun grafiğini çizmek istersek öncelikle grafiğin eksenleri kestiği noktaları belirlemeliyiz.

$x = 0$ için $y = -1$ ve $y = 0$ için $x = \frac{1}{2}$ olacaktır.

O halde f fonksiyonunun grafiği $(0, -1)$ ve $(\frac{1}{2}, 0)$ noktalarından geçeceğine göre, grafik aşağıdaki gibi olur.

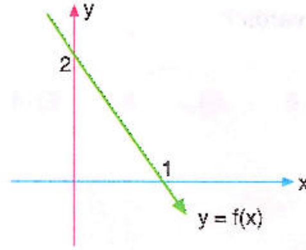


Grafiği bilinen bir doğrusal fonksiyonun denklemi bulunmak istenirse grafiğin eksenleri kestiği noktalardan yararlanılabilir.



Yukarıdaki gibi x eksenini a noktasında, y eksenini b noktasında kesen doğrunun denklemi $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ olur.

ÖRNEK 2



Yukarıdaki doğrusal fonksiyonun denklemini bulalım.

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{2} = 1$$

$$\frac{y}{2} = 1 - x$$

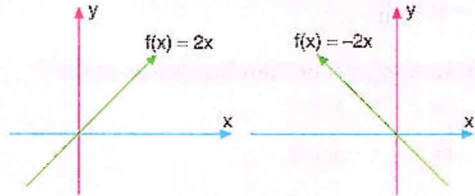
$$y = -2x + 2$$

$f(x) = -2x + 2$ bulunur.

- $f(x) = ax$ biçimindeki doğrusal fonksiyonların grafiği orijinden geçer. a pozitif ise doğru sağa eğik, a negatif ise doğru sola eğik çizilir.

ÖRNEK 3

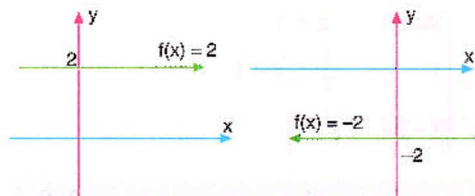
$f(x) = 2x$ ve $f(x) = -2x$ fonksiyonlarının grafikleri



- $f(x) = b$ biçimindeki doğrusal fonksiyonlara sabit fonksiyon denildiğini öğrenmiştik. Bu türden fonksiyonların grafiği x eksenine paralel bir doğrudur.

ÖRNEK 4

$f(x) = 2$ ve $f(x) = -2$ fonksiyonlarının grafikleri

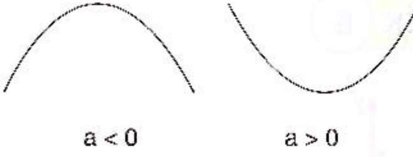




PARABOL GRAFİĞİ

$f(x) = ax^2 + bx + c$ ikinci dereceden fonksiyonun grafiğine parabol denir.

Parabol; a nın pozitif veya negatif olması durumuna göre, aşağıdaki gibi bir görüntüye sahiptir.



Parabol grafiği çizilirken aşağıdaki adımlara dikkat edilir.

* **Parabolün x eksenleri kestiği noktalar belirlenir.**
  - x = 0 için y eksenin kestiği nokta
  - y = 0 için x eksenini kestiği noktalar belirlenir.

  y = 0 için x değerleri bulunamıyorsa yani f(x) = 0 denkleminin kökleri yoksa parabol x eksenini kesmez. Grafik x ekseninin üstünde veya altında yer alır.

* **Tepe noktası (T(r, k)) belirlenir.**

  $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun grafiğinde
  - tepe noktasının apsisi: $r = -\frac{b}{2a}$
  - tepe noktasının ordinatı: $k = f(r)$



b = 0 ise parabolün tepe noktası y ekseni üzerindedir.

ÖRNEK 5

$f(x) = x^2 - 5x + 6$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

x^2 nin katsayısı pozitif olduğundan çizeceğimiz parabolün kolları yukarı doğru olacaktır.

Şimdi eksenleri kestiği noktaları belirleyelim.

x = 0 için $y = 6$

y = 0 için $x^2 - 5x + 6 = 0$

$(x - 3)(x - 2) = 0$

$x = 3$ veya $x = 2$ dir.

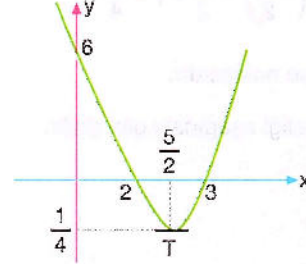
Tepe noktası: T(r, k)

$$r = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-5)}{2} = \frac{5}{2}$$

$$f(r) = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{2} + 6 = -\frac{1}{4}$$

olduğundan $T\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ tepe noktasıdır.

O halde $f(x) = x^2 - 5x + 6$ grafiği aşağıdaki gibi çizilir.



ÖRNEK 6

$f(x) = -x^2 + 6x - 9$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

x^2 katsayısı –1 olduğundan parabol kolları aşağıya doğru olacaktır.

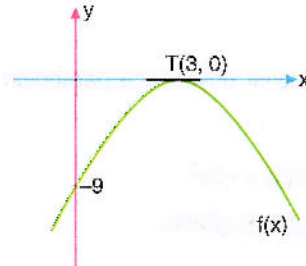
x = 0 için $y = -9$

y = 0 için $-x^2 + 6x - 9 = 0$

$-(x^2 - 6x + 9) = 0$

$-(x - 3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3$ olur.

Dikkat edilirse y = 0 için sadece x = 3 değeri bulundu. Bu durumda parabol (0, 3) noktasında x eksenine teğet olur ve tepe noktası da bu noktadır. Grafik aşağıdaki gibi çizilir.



ÖRNEK 7

$f(x) = x^2 + x + 1$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

x^2 katsayısı pozitif olduğundan parabol kolları yukarıya doğru olacaktır.

x = 0 için y = 1 dir.

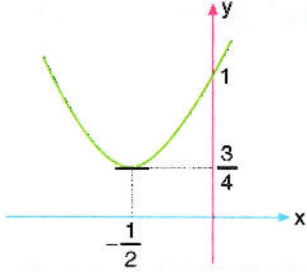
y = 0 için $x^2 + x + 1 = 0$ denkleminin gerçek kökü yoktur. Çünkü $\Delta = (1)^2 - 4.1.1$ olup $-3 < 0$ dır. Parabol x eksenini kesmez.

Tepe noktası: T(r, k) $r = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$

$$f(r) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4}$$

olduğundan $T\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ tepe noktasıdır.

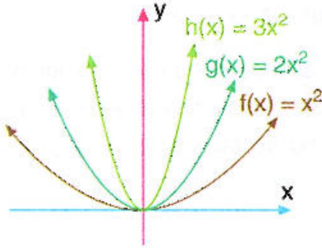
O halde $f(x) = x^2 + x + 1$ grafiği aşağıdaki gibi çizilir.



* **$f(x) = ax^2$ biçimindeki parabollerin tepe noktası orijindir.**

$f(x) = x^2$, $g(x) = 2x^2$, $h(x) = 3x^2$

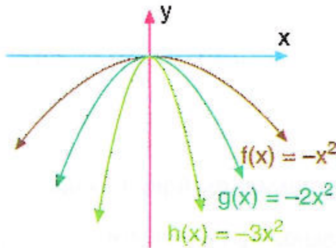
parabollerinin grafikleri aşağıdaki gibidir.



Dikkat edilirse x^2 nin katsayısı büyüdükçe parabolün kolları kapanmaktadır.

$f(x) = -x^2$, $g(x) = -2x^2$, $h(x) = -3x^2$

parabollerinin grafikleri aşağıdaki gibidir.

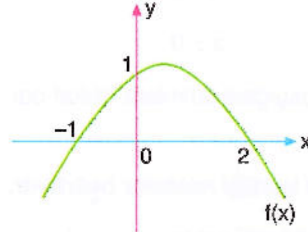


Dikkat edilirse x^2 nin katsayısı mutlak değerce büyüdükçe parabolün kolları kapanmaktadır.

* **Grafiği verilen parabolün denkleminin yazılması**

- Parabolün x eksenini kestiği noktalar $(x_1, 0)$ ve $(x_2, 0)$ ile başka bir nokta biliniyorsa parabolün denklemi $f(x) = a(x - x_1).(x - x_2)$ olur.

ÖRNEK 8



Yukarıdaki parabol grafiği f(x) e ait olduğuna göre, f(x) i bulalım.

$f(x) = a.(x - (-1)).(x - 2)$

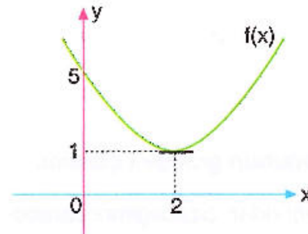
Parabol x = 0 için y = 1 noktasından geçtiğine göre f(0) = 1 dir. $f(0) = a.(0 + 1).(0 - 2) = 1$

$$-2a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

Buna göre, $f(x) = -\frac{1}{2}(x+1).(x-2)$ bulunur.

- Parabolün tepe noktası (T(r, k)) ile başka bir nokta biliniyorsa parabolün denklemi $\mathbf{f(x) = a(x - r)^2 + k}$ olur.

ÖRNEK 9



Yukarıdaki parabol grafiği f(x) e ait olduğuna göre, f(x) i bulalım.

T(r, k) = T(2, 1) olduğuna göre,

$f(x) = a(x - r)^2 + k = a.(x - 2)^2 + 1$

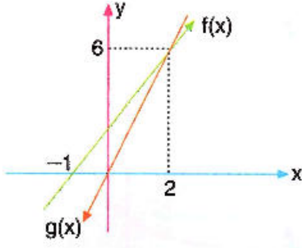
x = 0 için y = 5 olduğuna göre,

$f(0) = a(0 - 2)^2 + 1 = 4a + 1 = 5 \Rightarrow a = 1$ olur.

O halde $f(x) = (x - 2)^2 + 1$ bulunur.

ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

1.

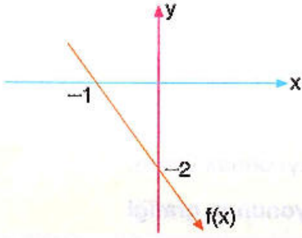


Yukarıdaki doğrusal grafikler f(x) ve g(x) fonksiyonlarına aittir.

Buna göre, (fog)(x) neye eşittir?

A) $3x + 2$ B) $6x + 2$ C) $-2x + 6$ D) $6x$ E) $3x - 3$

2.

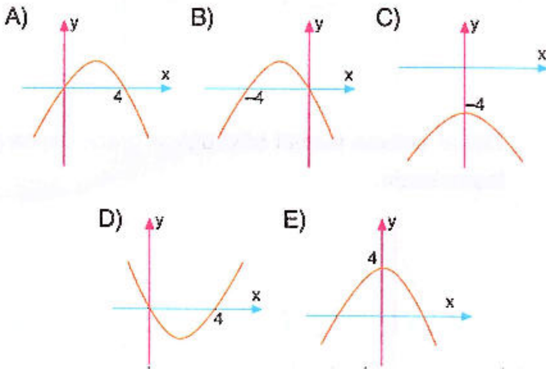


Yukarıdaki doğrusal grafik f(x) fonksiyonuna aittir.

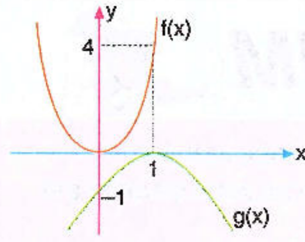
Buna göre, f(–x + 1) neye eşittir?

A) $2x$ B) $-2x - 4$ C) $2x - 4$ D) $x - 2$ E) $-x + 4$

3. **$f(x) = -x^2 - 4x$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**



4.

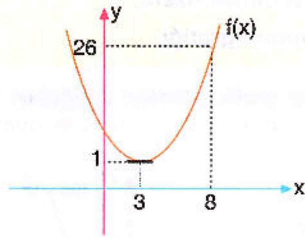


Yukarıdaki parabol grafikleri f(x) ve g(x) fonksiyonlarına aittir.

Buna göre, g(–f(x)) neye eşittir?

A) $4x^2 + 1$ B) $-(4x^2 + 1)$ C) $4x^4$ D) $-(4x^2 + 1)^2$ E) $-(4x^4 + 1)$

5.

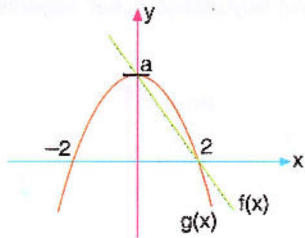


Yukarıdaki parabol y = f(x) fonksiyonuna aittir.

Buna göre, f(5) kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 5 D) 11 E) 17

6.



Yukarıdaki parabol ve doğrusal grafik sırasıyla g(x) ve f(x) fonksiyonlarına aittir.

(gof)(1) = –a olduğuna göre, a kaçtır?

A) $4\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) 2 D) $\sqrt{2}$ E) 1

1) B 2) C 3) B 4) D 5) C 6) A

ADIM



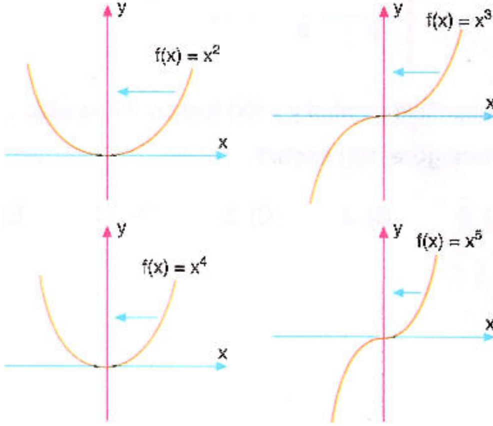
SIK KARŞILAŞILAN BAZI FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİ

Bu adımda grafik sorularında karşılaşılan bazı fonksiyonların grafikleri üzerinde duracağız. Bu türden fonksiyonların grafiklerine aşina olmanız grafik çizimi, türev, integral gibi konularda size kolaylık sağlayacaktır.

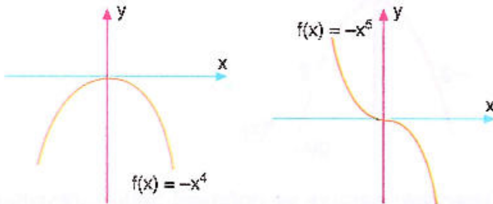
Konu anlatımında sadece bilinmesi gereken ayrıntılar üzerinde durulmuştur. Daha ayrıntılı anlatımlar için (örneğin logaritma fonksiyonunun grafiği için logaritma konusuna bakılması gibi) ilgili konuya çalışılabilir.

- **n pozitif bir tamsayı olmak üzere, $f(x) = x^n$ fonksiyonunun grafiği**

Bazı n değerleri için grafik çizimleri aşağıdaki gibi olacaktır.

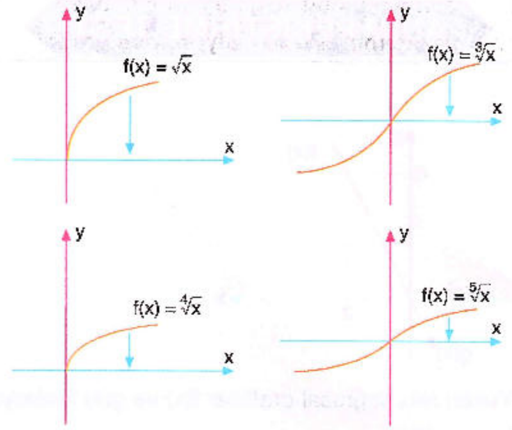


Dikkat edilirse kuvvet büyüdükçe kollar kapanmaktadır.

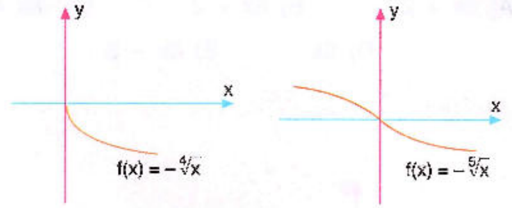


- **n pozitif bir tamsayı olmak üzere, $f(x) = \sqrt[n]{x}$ fonksiyonunun grafiği**

Bazı n değerleri için grafik çizimleri şekildeki gibi olacaktır.

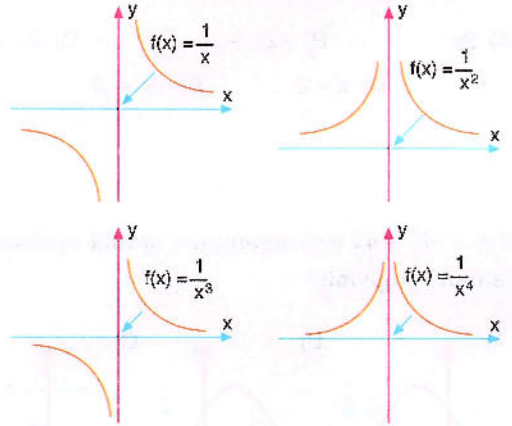


Dikkat edilirse kökün derecesi büyüdükçe kollar kapanmaktadır.

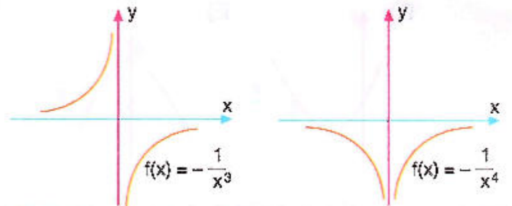


- **n pozitif bir tamsayı olmak üzere, $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^n$ fonksiyonunun grafiği**

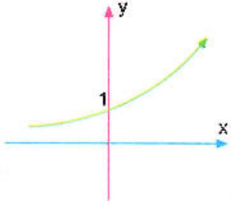
Bazı n değerleri için grafik çizimleri aşağıdaki gibi olacaktır.



Dikkat edilirse kuvvet büyüdükçe grafik orijine yaklaşmaktadır.

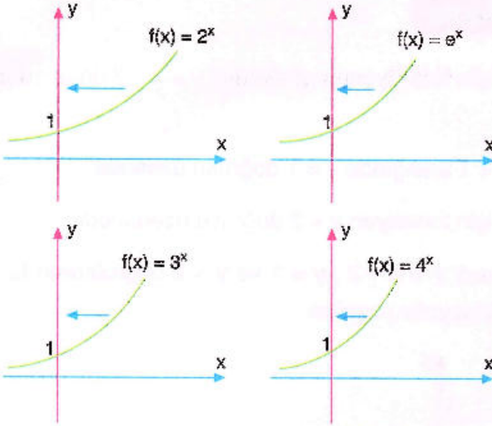


- **a > 1 den büyük bir reel sayı olmak üzere, $f(x) = a^x$ biçimindeki fonksiyonunun grafiği**



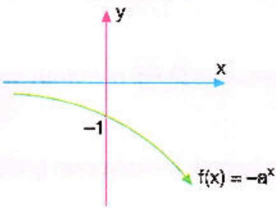
biçimindedir.

Bu türden bazı fonksiyonların grafikleri aşağıda çizilmiştir.



Dikkat edilirse a değeri büyüdükçe grafik y eksenine doğru yaklaşmaktadır.

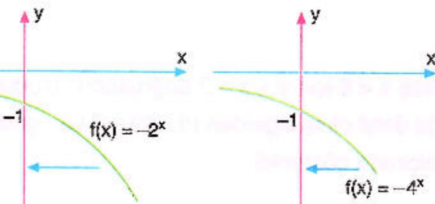
Eğer fonksiyon $f(x) = -a^x$ biçimde olsaydı grafiği aşağıdaki gibi olacaktı.



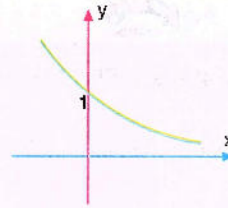
biçimindedir.

Örneğin;

$f(x) = -2^x$ ve $f(x) = -4^x$ fonksiyonlarının grafikleri aşağıdaki gibidir.



- **$0 < a < 1$ olmak üzere $f(x) = a^x$ biçimindeki fonksiyonunun grafiği**

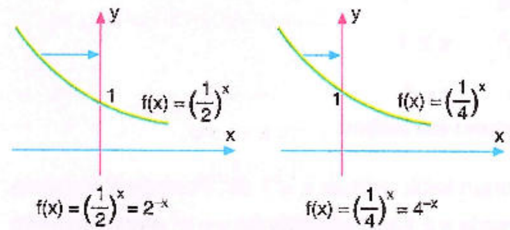


biçimindedir.

Örneğin;

$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ve $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

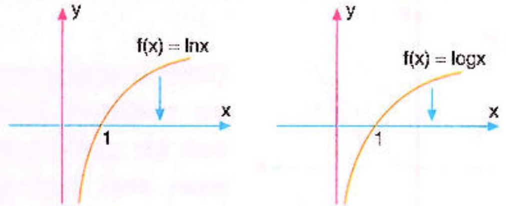
fonksiyonlarının grafikleri aşağıdaki gibidir.



$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$ $\quad$ $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x = 4^{-x}$

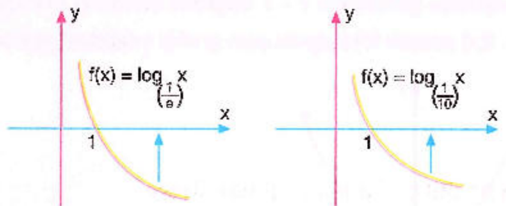
- **Logaritma fonksiyonunun grafiği**

Logaritma fonksiyonunun grafiği logaritma konusunda ayrıntılı anlatıldığından biz burada bazı sık karşılaşılan logaritmalı fonksiyonların grafiğini vereceğiz.



Dikkat edilirse soldaki logaritmalı fonksiyonun tabanı e sayısı, sağdakinin ise 10 dur. Taban büyüdükçe grafiğin bir kolu x eksenine yaklaşmaktadır.

Şimdi de tabanı 1 den küçük olan logaritmalı fonksiyonların grafiğini çizelim.



$f(x) = \log_{(\frac{1}{e})}x = \log_{e^{-1}}x$ $\quad$ $f(x) = \log_{(\frac{1}{b})}x$

$f(x) = -\ln x$ $\quad$ $f(x) = -\log x$

ADIM



PARÇALI FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİ

Parçalı fonksiyonların grafikleri çizilirken kritik noktalara dikkat edilir.

Kritik noktaların sağında, solunda ya da üzerinde fonksiyonun grafiği farklı görüntülere sahip olabilir. Fonksiyonun kuralına ve bu kritik noktalara dikkat edilerek grafik çizimi gerçekleştirilir.

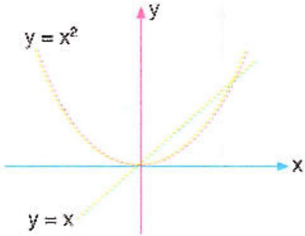
Örneğin;

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 1 \\ x & x < 1 \end{cases}$$

fonksiyonunu ele alalım.

Fonksiyonun kritik noktası x = 1 dir. Fonksiyon kuralına baktığımızda $x \geq 1$ için görüntünün $y = x^2$ eğrisi üzerinde olduğu, x < 1 için görüntünün y = x doğrusu üzerinde olduğu görülmektedir.

O halde fonksiyonun grafiği çizilirken öncelikle taslak olarak $y = x^2$ eğrisi ile y = x doğrusu çizilmelidir. Bu çizimler aşağıda gösterilmiştir.

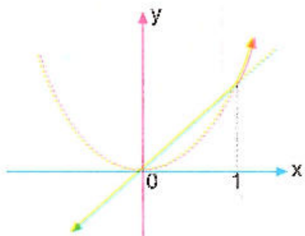


Çizilen iki grafiğin kesişme noktalarını bulabilmek için grafik denkleminin ortak çözümünü yapalım.

$x^2 - x = 0 \Rightarrow x.(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0$ ve $x = 1$

Ortak çözümde grafiklerin kesim noktalarının apsisi x = 0 ve x = 1 noktası olarak bulundu.

$x \geq 1$ için fonksiyon görüntüsü $y = x^2$ eğrisi, x < 1 için fonksiyonun görüntüsü y = x doğrusu üzerinde olduğuna göre, f(x) parçalı fonksiyonunun grafiği şekildeki gibi olur.



ADIM PEKİŞTİRME

ÖRNEK 1

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < 1 \\ 2 & 1 \leq x \end{cases}$$

fonksiyonunun grafiği nedir?

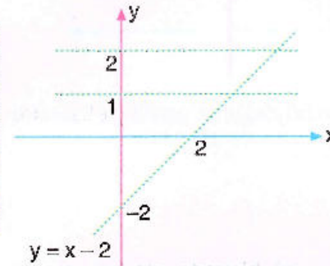
Çözüm

x < 0 için fonksiyonun görüntüsü y = x – 2 doğrusu üzerinde

$0 \leq x < 1$ aralığında y = 1 doğrusu üzerinde

$1 \leq x$ için fonksiyon y = 2 doğrusu üzerindedir.

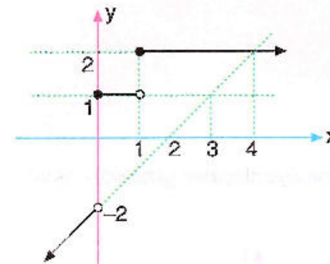
İlk olarak y = x – 2 , y = 1 ve y = 2 doğrularının taslak olarak çizimini yapalım.



y = 1 ile y = x – 2 doğrularının kesiştiği noktanın apsisi
$1 = x - 2 \Rightarrow x = 3$ tür.

y = 2 ile y = x – 2 doğrularının kesiştiği noktanın apsisi
$2 = x - 2 \Rightarrow x = 4$ tür.

Şimdi bu bilgilere göre, f(x) parçalı fonksiyonun grafiğini çizelim.



Dikkat edilirse x < 0 için y = x – 2 doğrusunu çizerken x = 0 aralığa dahil olmadığından (0, –2) noktası grafikte içi boş bir biçimde gösterildi.

Aynı şekilde $0 \leq x < 1$ için $y = 1$ doğrusunu çizerken $x = 1$ aralığa dahil olmadığından (1, 1) noktası grafikte içi boş bir biçimde gösterildi.

ÖRNEK 2

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x > 0 \\ -2 & x = 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

fonksiyonunun grafiği nedir?

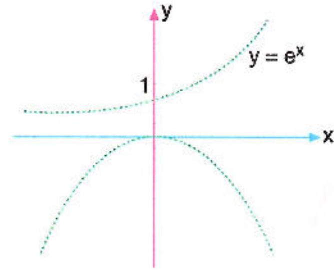
Çözüm

$x > 0$ için fonksiyonun görüntüsü $y = e^x$ eğrisi üzerinde

$x = 0$ için fonksiyonun görüntüsü -2 dir.

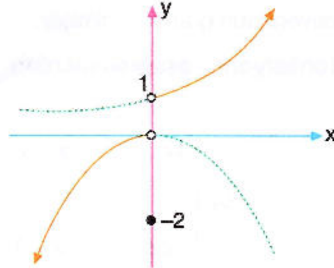
$x < 0$ için fonksiyonun görüntüsü $-x^2$ eğrisi üzerindedir.

$y = e^x$ eğrisi ve $y = -x^2$ eğrisini taslak olarak çizelim.



Görüldüğü üzere iki grafiğin bir kesişme noktası yoktur.

Şimdi x in aralıklarına dikkat ederek grafiği çizelim.



ÖRNEK 3

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ x+2 & x < 0 \end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor.

f(x – 1) fonksiyonunun grafiği nedir?

Çözüm

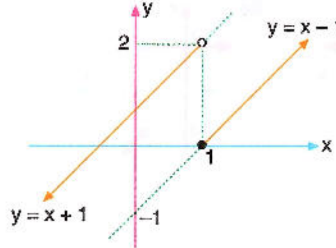
f de x gördüğümüz yerlere x – 1 yazalım.

$$f(x-1) = \begin{cases} x-1 & x-1 \geq 0 \\ x-1+2 & x-1 < 0 \end{cases}$$

$$f(x-1) = \begin{cases} x-1 & x-1 \geq 0 \\ x+1 & x-1 < 0 \end{cases}$$

$$f(x-1) = \begin{cases} x-1 & x \geq 1 \\ x+1 & x < 1 \end{cases}$$

f(x – 1) fonksiyonunun kuralını bulduğumuza göre, bu kurala göre fonksiyonun grafiği aşağıdaki gibi olur.



ÖRNEK 4

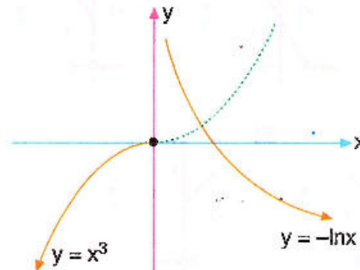
$$f(x) = \begin{cases} -\ln x & x > 0 \\ x^3 & x \leq 0 \end{cases}$$

fonksiyonunun grafiği nedir?

Çözüm

Parçalı fonksiyonda kritik değer $x = 0$ olduğundan iki fonksiyonun kesişme noktasının burada bir önemi yoktur. Çünkü $x > 0$ için $y = -\ln x$ eğrisi üzerinde görüntü oluşurken $x \leq 0$ için $y = x^3$ eğrisi üzerinde görüntü oluşur.

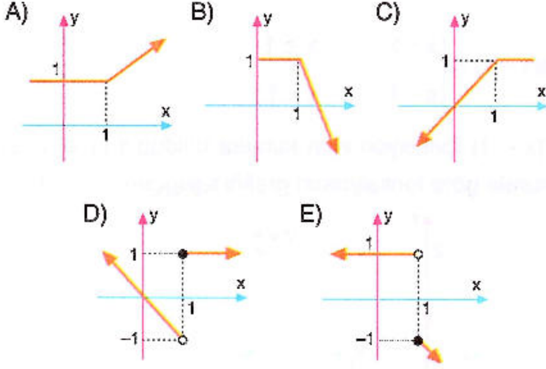
O halde f(x) in grafiği aşağıdaki gibi olur.



ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

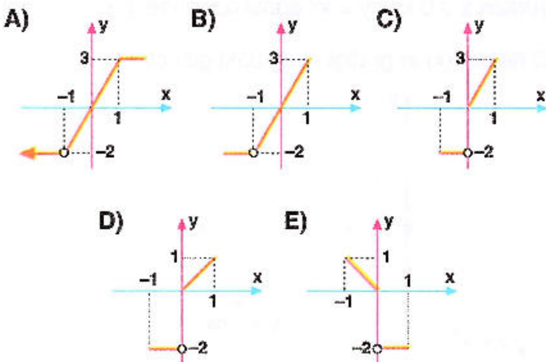
1. $f(x)=\begin{cases}-x & x\geq 1\\ 1 & x<1\end{cases}$

fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

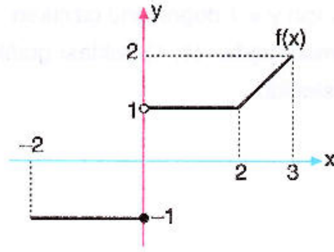


2. $f(x)=\begin{cases}-2 & x<0\\ x & 0\leq x<2\\ 3 & 2\leq x\end{cases}$

biçiminde verilen fonksiyonun [–1, 1] aralığındaki grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



3.



Yukarıda bir parçası verilen bir f(x) fonksiyonunun kuralı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $\begin{cases}-1 & x\leq 0\\ 1 & 0<x\leq 2\\ x-1 & 2<x\end{cases}$

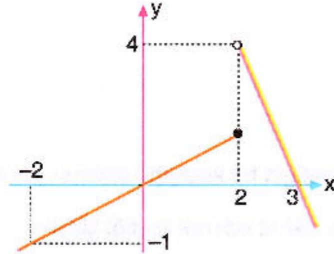
B) $\begin{cases}-1 & x\leq 0\\ 1 & 0\leq x<2\\ 2x & 2<x\end{cases}$

C) $\begin{cases}-1 & x\leq -2\\ 1 & -2\leq x<2\\ x-1 & 2\leq x\end{cases}$

D) $\begin{cases}-1 & x\leq 0\\ 1 & 0\leq x<2\\ \frac{x}{2} & 2<x\end{cases}$

E) $\begin{cases}-1 & x\leq 0\\ 1 & 0\leq x\leq 2\\ 2x-3 & 2<x\end{cases}$

4.



Yukarıda y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, f(2x) fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{cases}x & x\leq 1\\ 4x & x>1\end{cases}$

B) $\begin{cases}4x & x\leq 2\\ -8x+12 & x>2\end{cases}$

C) $\begin{cases}x & x\leq 1\\ -8x+12 & x>1\end{cases}$

D) $\begin{cases}2x & x\leq 1\\ -4x+12 & x>1\end{cases}$

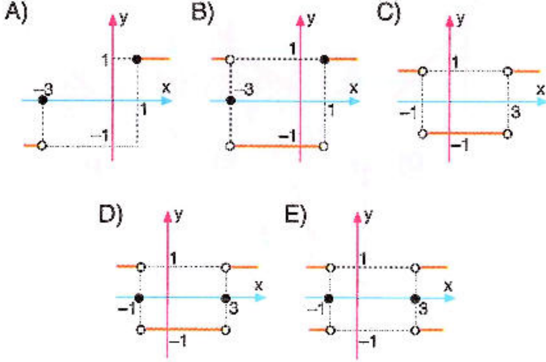
E) $\begin{cases}x & x\leq 1\\ -4x+12 & x>1\end{cases}$

1) E 2) D 3) A 4) C

5. $f(x) = x^2 - 2x - 3$ fonksiyonu veriliyor.

$$g(x) = \begin{cases} 1 & f(x) > 0 \\ 0 & f(x) = 0 \\ -1 & f(x) < 0 \end{cases}$$

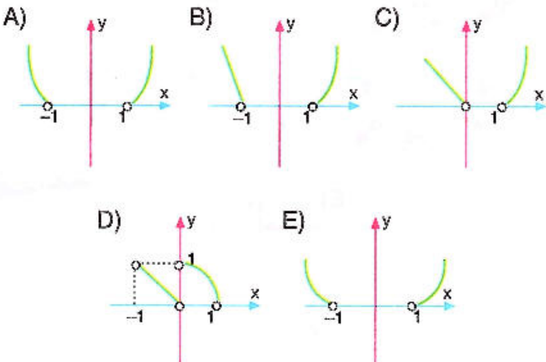
olduğuna göre, g(x) fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



6. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

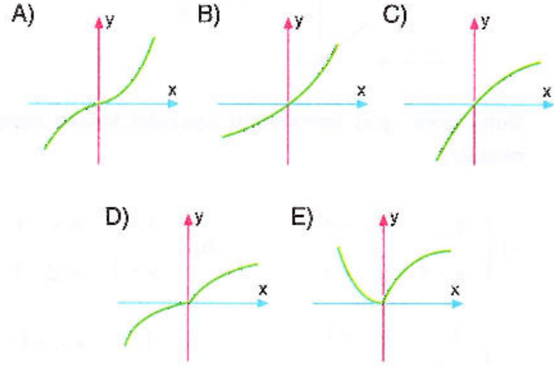
fonksiyonu veriliyor.

f in $f(x) > 0$ eşitsizliğini sağladığı noktalarının grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

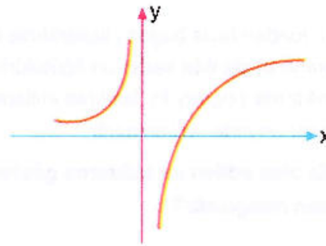


7. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ x^3 & x < 0 \end{cases}$

fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



8.



Yukarıdaki grafiği verilen f(x) fonksiyonu aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $f(x) = \begin{cases} e^x & x > 0 \\ x^2 & x < 0 \end{cases}$

B) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x > 0 \\ \ln x & x < 0 \end{cases}$

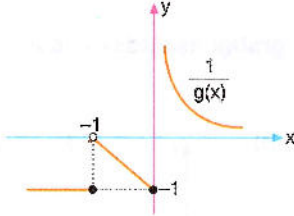
C) $f(x) = \begin{cases} \ln x & x > 0 \\ \dfrac{1}{x} & x < 0 \end{cases}$

D) $f(x) = \begin{cases} e^x & x < 0 \\ \ln x & x > 0 \end{cases}$

E) $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x} & x < 0 \\ \ln x & x > 0 \end{cases}$

5) D 6) C 7) D 8) E

9. $\dfrac{1}{g(x)}$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.



Buna göre, g(x) fonksiyonu aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $\begin{cases} -1 & x < -1 \\ -x-1 & x \geq -1 \end{cases}$

B) $\begin{cases} -1 & x < -1 \\ -x+1 & x \geq -1 \end{cases}$

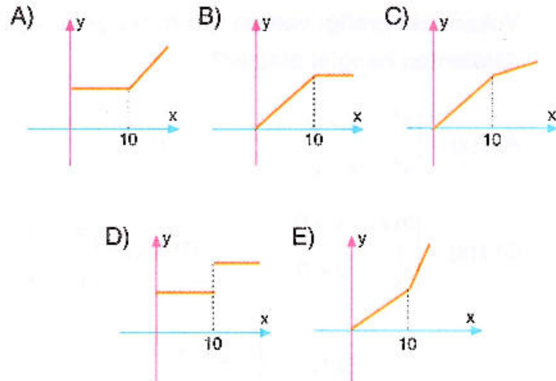
C) $\begin{cases} -1 & x \leq -1 \\ \dfrac{-1}{x+1} & 0 \geq x > -1 \\ \dfrac{1}{x} & x > 0 \end{cases}$

D) $\begin{cases} -1 & x < -1 \\ -x-1 & 0 > x \geq -1 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$

E) $\begin{cases} -1 & x \leq -1 \\ \dfrac{-1}{x+1} & 0 \geq x > -1 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$

10. Bir un fabrikasında 10 tondan fazla buğday kullanılırsa kullanılan buğday miktarının beşte ikisi kadar un öğütülürken, 10 ton ve daha az miktarda buğday kullanılırsa kullanılan her miktar buğday kadar un elde edilmektedir.

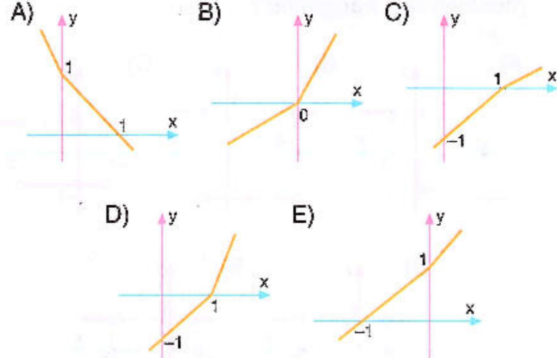
Buna göre, fabrikada elde edilen un miktarını gösteren grafik aşağıdakilerden hangisidir?



11. $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 0 \\ 2x+1 & x > 0 \end{cases}$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, $f^{-1}(x)$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

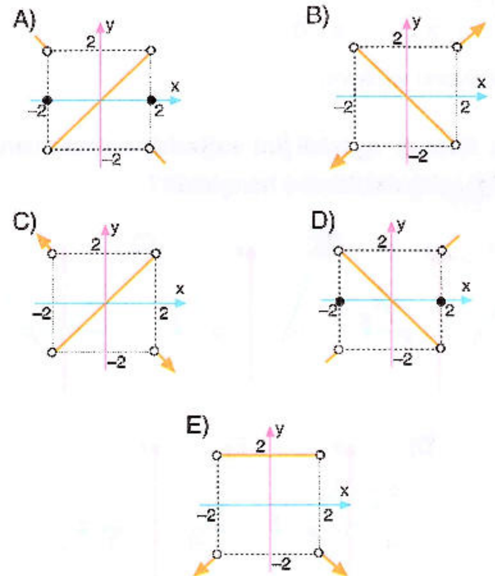


12. $f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

olduğuna göre,

$$g(x) = \frac{x}{f(4-x^2)}$$

fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



9) E 10) C 11) C 12) C

ADIM



MUTLAK DEĞERLİ FONKSİYON GRAFİĞİ

Mutlak değerli fonksiyon grafikleri çizilirken öncelikle fonksiyon kritik noktalara göre düzenlenerek parçalı fonksiyona dönüştürülür. Sonra bu parçalı fonksiyona göre fonksiyonun grafiği çizilir.

Örneğin:

$f(x) = |x - 2| + x + 2$ fonksiyonunu ele alalım.

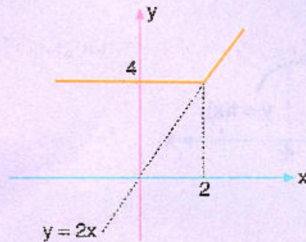
Fonksiyonda mutlak değerli yalnızca bir ifade bulunmaktadır. Bu ifadenin kritik noktası, içini sıfır yapan değer $x = 2$ değeridir.

Fonksiyon bu noktaya göre parçalı fonksiyona aşağıdaki gibi dönüştürülür.

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 + x + 2 & x \geq 2 \\ -x + 2 + x + 2 & x < 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 2 \\ 4 & x < 2 \end{cases}$$

O halde fonksiyonun grafiği aşağıdaki gibi olacaktır.



PRATİK

$y = |f(x)|$ biçimindeki fonksiyonların grafikleri çizilirken $f(x)$ in grafiği çizilir.

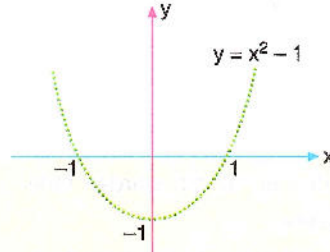
Çizilen grafiğin x ekseni altında kalan kısmının x eksenine göre simetriği alınır. Bir başka deyişle grafiğin x ekseni altında kalan kısmı yukarı katlanır.

Çünkü $y = |f(x)|$ eşitliğinde y nin negatif olması yani grafiğin x ekseni altında kalması mümkün değildir.

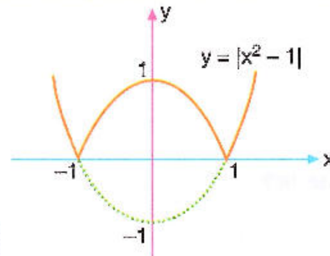
Örneğin:

$f(x) = |x^2 - 1|$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

Önce mutlak değer yokmuş gibi hareket ederek $x^2 - 1$ ifadesinin grafiğini çizelim.



Şimdi grafiğin altta kalan kısmını yukarı katlayarak grafiği çizelim.



ADIM PEKİŞTİRME

ÖRNEK 1

$f(x) = |x - 2| + |x + 1|$

fonksiyonunun grafiği nedir?

Çözüm

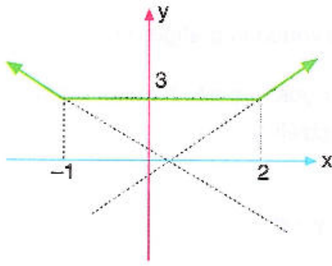
Fonksiyonun iki kritik noktası vardır.

Bunlar $x = 2$ ve $x = -1$ dir. O halde f fonksiyonunu işaret tablosu yardımıyla parçalı fonksiyona dönüştürelim.

x	-1		2
f(x)	$-x + 2 - x - 1$	$-x + 2 + x + 1$	$x - 2 + x + 1$
	$-2x + 1$	3	$2x - 1$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x \geq 2 \\ 3 & -1 \leq x < 2 \\ -2x + 1 & x < -1 \end{cases}$$

Buna göre, f(x) in grafiği aşağıdaki gibidir.



PRATİK

a ve b den en az biri sıfırdan farklı olmak üzere
f(x) = |x + a| + |x + b| türünden fonksiyonların grafikleri yukarıdaki gibi "kova" biçimindedir.

ÖRNEK 2

f(x) = |x – 1| – |x + 3|

fonksiyonunun grafiği nedir?

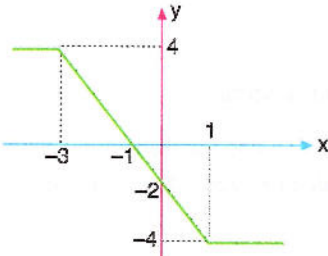
Çözüm

Fonksiyonun kritik noktaları x = 1 ve x = 3 tür. Fonksiyonun bu noktalara göre işaret tablosunu inceleyelim.

x	–3		1	
f(x)	–x + 1 + x + 3	–x + 1 – x – 3		x – 1 – x – 3
	4	–2x – 2		–4

$$f(x)=\begin{cases}4 & x\leq -3\\ -2x-2 & -3<x\leq 1\\ -4 & 1<x\end{cases}$$

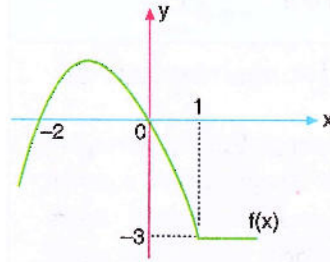
Buna göre, f(x) in grafiği aşağıdaki gibidir.



PRATİK

a ve b den en az biri sıfırdan farklı olmak üzere
f(x) = |x + a| – |x + b| türünden fonksiyonların grafikleri yukarıdaki gibi "Z" biçimindedir.

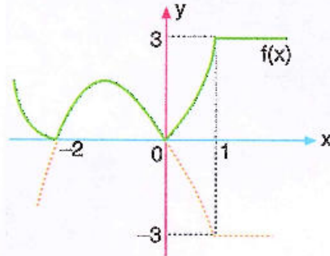
ÖRNEK 3



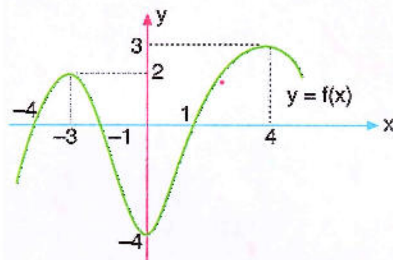
Grafiğe göre, |f(x)| fonksiyonunun grafiği nedir?

Çözüm

Bir fonksiyonun mutlak değerinin grafiği isteniyorsa çizim pratik olarak, verilen fonksiyonun grafiğinin x ekseninin altında kalan kısımları yukarı katlanır. Çünkü |f(x)| negatif olamaz. O halde |f(x)| fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.



ÖRNEK 4



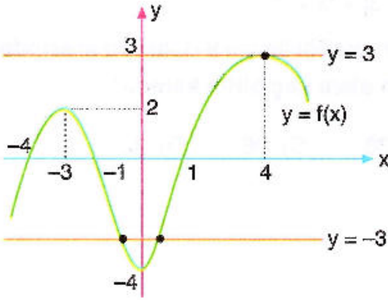
y = f(x) için [–4, 4] aralığında $\big||f(x)| - 1\big| = 2$ eşitliğini sağlayan kaç tane x değeri vardır?

Çözüm

$\big||f(x)| - 1\big| = 2 \Rightarrow |f(x)| - 1 = \pm 2$ ise $|f(x)| - 1 = 2$ ve
$|f(x)| - 1 = -2$ dir.

O halde f(x) = ±3 olur ancak |f(x)| = –1 olamaz.

Grafik yardımıyla [–4, 4] aralığında f(x) = 3 ve f(x) = –3 koşulunu sağlayan x değerlerinin kaç tane olduğunu bulalım. Bunun için y = 3 ve y = –3 değerleri f ile kesiştirilir.



O halde $||f(x)| - 1| = 2$ eşitliğini sağlayan 3 tane x değeri vardır.

ÖRNEK 5

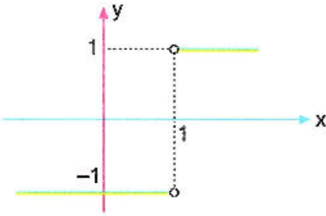
$f(x) = \dfrac{|x-1|}{x-1}$ **fonksiyonunun grafiği nedir?**

Çözüm

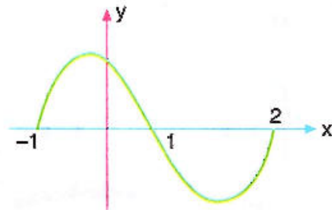
f in fonksiyon olduğu biliniyor. x = 1 de tanımlı değildir. Ancak x = 1 fonksiyonunun kritik noktasıdır. Bu noktaya göre f i parçalı fonksiyon biçiminde yazalım.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x-1} & x > 1 \\ \dfrac{-(x-1)}{x-1} & x < 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 1 & x > 1 \\ -1 & x < 1 \end{cases}$$

Şimdi f in grafiğini çizelim.



ÖRNEK 6



Yukarıda [–1, 2] aralığında tanımlı f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$g(x) = \dfrac{|f(x)| - f(x)}{f(x)}$ **fonksiyonunun denklemi nedir?**

Çözüm

f in grafiğinden yararlanarak |f(x)| i inceleyelim. g(x) in denkleminde f(x) paydada yer aldığı için $f(x) \neq 0$ olur.

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & -1 < x < 1 \\ -f(x) & 1 < x < 2 \end{cases}$$

O halde g(x) fonksiyonu şu şekilde olur.

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x)}{f(x)} & -1 < x < 1 \\ \dfrac{-f(x) - f(x)}{f(x)} & 1 < x < 2 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & -1 < x < 1 \\ -2 & 1 < x < 2 \end{cases}$$

ÖRNEK 7

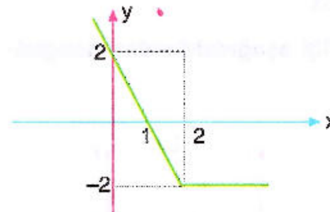
$f(x) = ||x-2| - x|$ **fonksiyonunun grafiği nedir?**

Çözüm

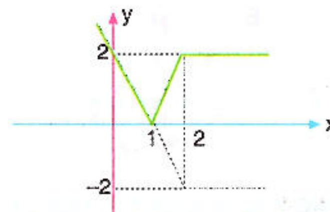
En dıştaki mutlak değer yokmuş gibi davranalım. Yani fonksiyonu $|x-2| - x$ gibi değerlendirelim. Bu ifadenin grafiğini çizip daha sonra x ekseninin altına kalan kısmı yukarı katlayalım.

$$|x-2| - x = \begin{cases} -2 & x \geq 2 \\ 2 - 2x & x < 2 \end{cases}$$

Bu ifadenin grafiği aşağıdaki gibidir.



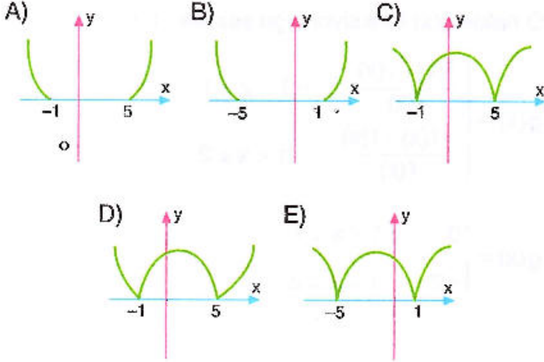
Şimdi de x ekseninin altında kalan kısmı yukarı katlayalım.



ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

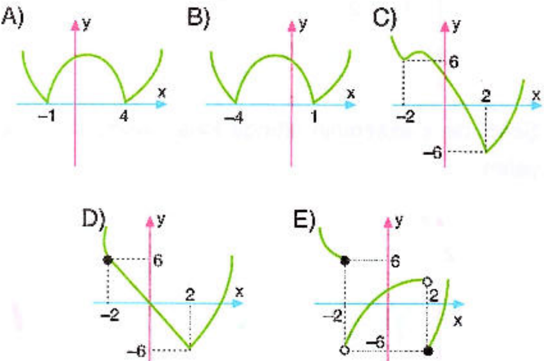
1. $f(x) = |-x^2 + 4x + 5|$

fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



2. $f(x) = |x^2 - 4| - 3x$

fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



3. $f(x) = |x - 3| + |x + 2|$

fonksiyonunun grafiği ile y = 9 doğrusu arasında kalan bölgenin alanı kaç birim karedir?

A) 40 B) 38 C) 36 D) 32 E) 28

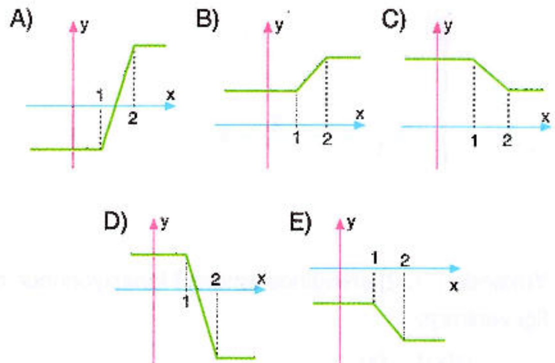
4. $f(x) = ||x - 2| + x|$

fonksiyonunun grafiği, x = 4 doğrusu ve eksenler arasında kalan sınırlı bölgenin alanı kaç birim karedir?

A) 16 B) 12 C) 10 D) 8 E) 6

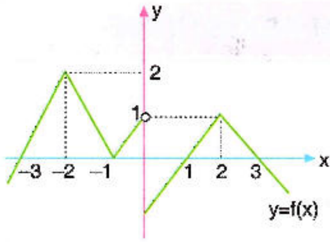
5. $f(x) = |x - 2| - |x - 1|$

fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



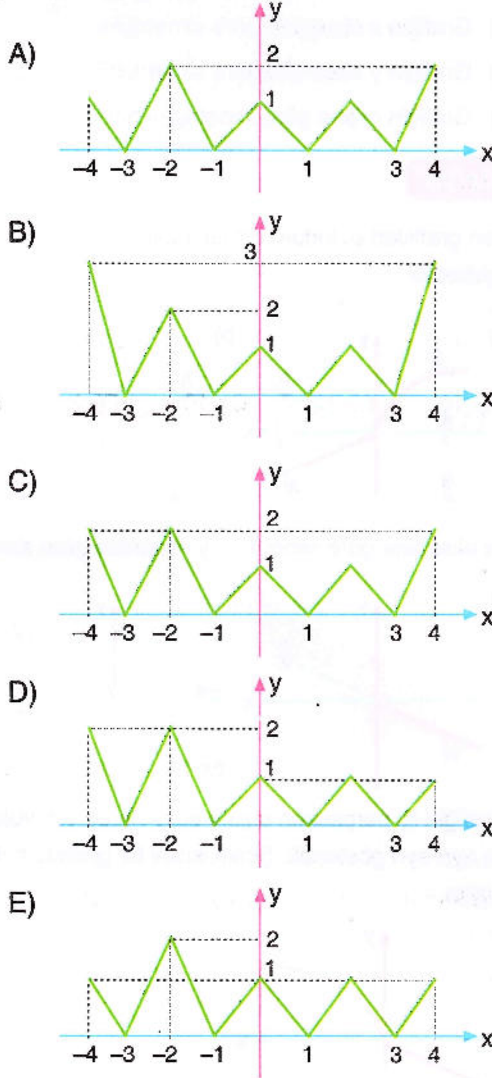
1) D 2) C 3) E 4) B 5) D

6.



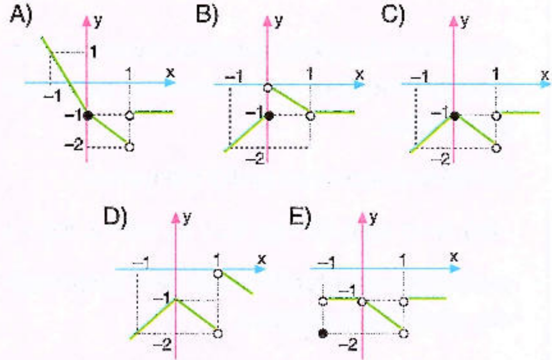
Yukarıda y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, |f(x)| fonksiyonunun [–4, 4] aralığındaki grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

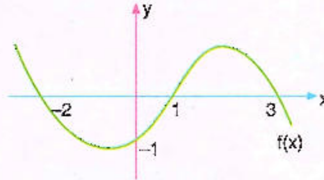


7. $f(x) = -|x| + \dfrac{|x-1|}{x-1}$

fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

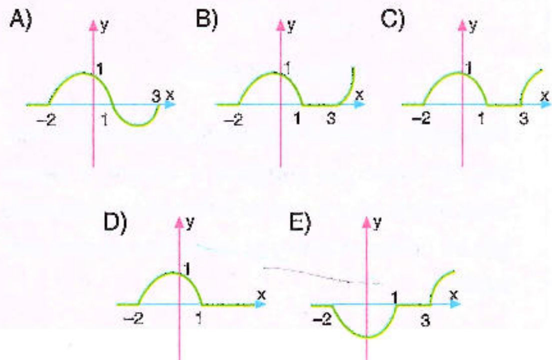


8.



Yukarıdaki f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, $g(x) = \dfrac{|f(x)| - f(x)}{2}$ **fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**



6) D

7) D

8) B

ADIM



GRAFİKLERDE SİMETRİ VE ÖTELEME

Bu adımda bir grafikte koordinat düzleminde öteleme (kaydırma) ve simetri nasıl olur, anlatmaya çalışacağım.

Bir f(x) fonksiyonunun grafiği biliniyorken

$-f(x)$, $f(-x)$, $f(|x|)$, $f(x-a)$, $f(x+a)$, $f(x)-a$, $f(x)+a$

grafiklerinin çizimi pratik olarak nasıl gerçekleştirilir, göstermeye çalışalım.

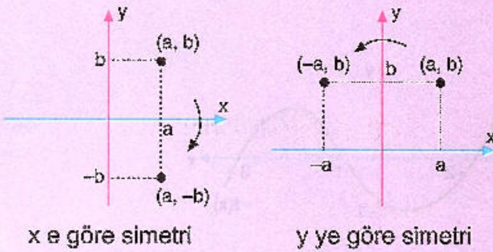
* **Bir Grafiğin x Eksenine, y Eksenine ve Orijine Göre Simetriği**

Öncelikle bir (a, b) noktasını simetriği nasıl alınır, onu belirtelim.

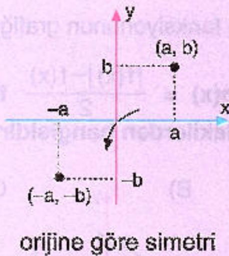
(a, b) nin x eksenine göre simetriği (a, –b)

(a, b) nin y eksenine göre simetriği (–a, b)

(a, b) nin orijine göre simetriği (–a, –b) dir.



x e göre simetri   y ye göre simetri

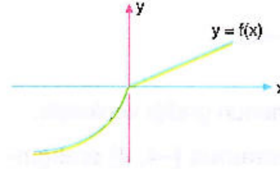


orijine göre simetri

Fonksiyon grafikleri noktaların birleşiminden oluşur. Bir fonksiyon grafiğinin x ekseni, y ekseni veya orijine göre simetrisi bulunurken yukarıdaki gibi bir noktanın simetrisi üzerinden hareket edilebilir.

ADIM PEKİŞTİRME

ÖRNEK 1



Yukarıda f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

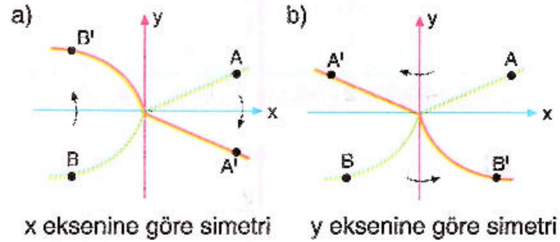
a) Grafiğin x eksenine göre simetriğini

b) Grafiğin y eksenine göre simetriğini

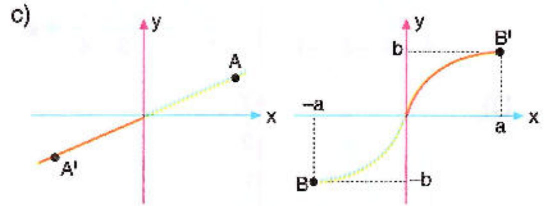
c) Grafiğin orijine göre simetriğini bulalım.

Çözüm

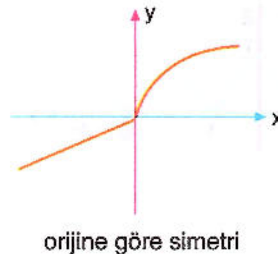
İstenen grafikleri bulurken bir noktanın simetrisi üzerinden gidilebilir.



x eksenine göre simetri   y eksenine göre simetri



Grafiğin iki parçasının orijine göre simetrisini yukarıda ayrı ayrı gösterdik. Şimdi ikisini bir grafikte birleştirelim.

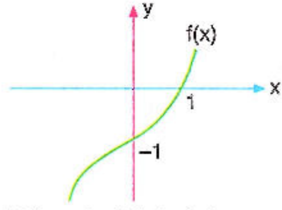


orijine göre simetri

* **–f(x) grafiğinin çizimi**

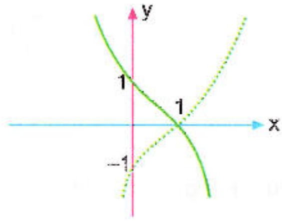
Bir f(x) fonksiyonunun grafiği biliniyorken bu grafiğin x eksenine göre simetriği alınırsa –f(x) in grafiği elde edilir.

ÖRNEK 2



Yukarıda f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.
Buna göre, –f(x) fonksiyonunun grafiğini çizelim.

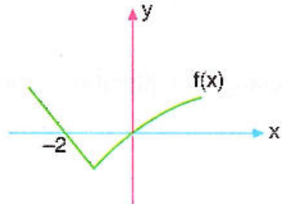
f fonksiyonunun x eksenine göre simetriği alınırsa aşağıdaki grafik elde edilir.



* **f(–x) grafiğinin çizimi**

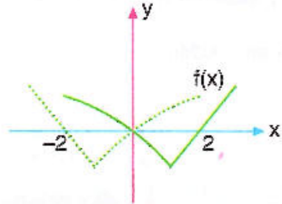
Bir f(x) fonksiyonunun grafiği biliniyorken bu grafiğin y eksenine göre simetriği alınırsa f(–x) in grafiği elde edilir.

ÖRNEK 3



Yukarıda f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.
Buna göre, f(–x) fonksiyonunun grafiğini çizelim.

f fonksiyonunun y eksenine göre simetriği alınırsa aşağıdaki grafik elde edilir.



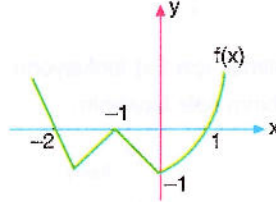
* **f(|x|) grafiğinin çizimi**

Bir f(x) fonksiyonun grafiği biliniyorken f(|x|) fonksiyonunun grafiğini çizebilmek için f grafiğinin y ekseninin solunda kalan parçası atılır. Bu atılan parça yerine y ekseninin sağında kalan parçanın x eksenine göre simetriği çizilir.

Bunun nedeni x in negatif değerleri için elde edilen sonuçların x in pozitif değerleri ile aynı olmasıdır.

$f(|1|) = f(|-1|) = f(1)$

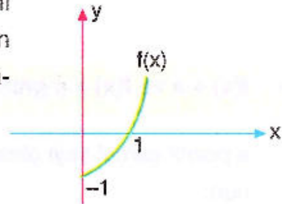
ÖRNEK 4



Yukarıda f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

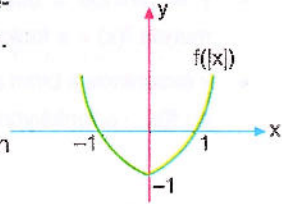
Buna göre, f(|x|) fonksiyonunun grafiğini çizelim.

f(|x|) fonksiyonunun grafiğini çizebilmek için önce f(x) in grafiğinde y ekseninin solunda kalan parçayı atalım.



Şimdi kalan grafiğin y eksenine göre simetriğini çizelim.

Böylece f(|x|) fonksiyonunun grafiği elde edilir.

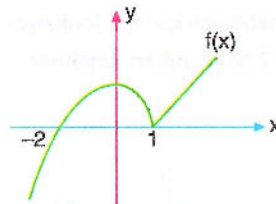


* **f(x – a) ve f(x + a) grafiklerinin çizimi**

a pozitif gerçel sayı olmak üzere, bir f(x) fonksiyonunun;

- x ekseninde a birim sola kaydırılması durumunda f(x + a) fonksiyonunun grafiği elde edilir.
- x ekseninde a birim sağa kaydırılması durumunda f(x – a) fonksiyonunun grafiği elde edilir.

ÖRNEK 5

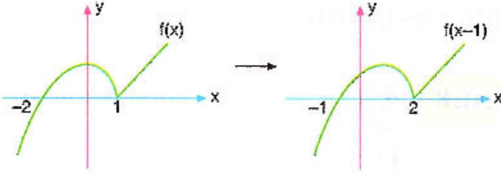


Yukarıda y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

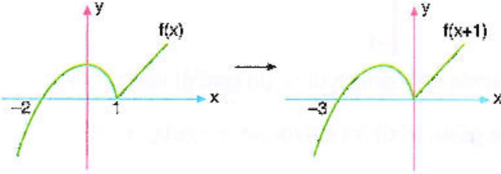
a. f(x – 1) in grafiğini

b. f(x + 1) in grafiğini çizelim.

a. f(x – 1) grafiğini elde edebilmek için f(x) fonksiyonunun grafiği x ekseninde 1 birim sağa kaydırılır.



b. f(x + 1) grafiğini elde edebilmek için f(x) fonksiyonunun grafiği x ekseninde 1 birim sola kaydırılır.

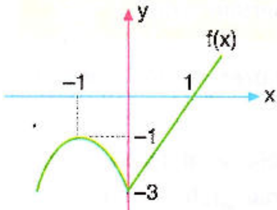


* **f(x) + a ve f(x) – a grafiklerinin çizimi**

a pozitif gerçel sayı olmak üzere, bir f(x) fonksiyonunun;

- y ekseninde a birim yukarı kaydırılması durumunda f(x) + a fonksiyonunun grafiği elde edilir.
- y ekseninde a birim aşağı kaydırılması durumunda f(x) – a fonksiyonunun grafiği elde edilir.

ÖRNEK 6

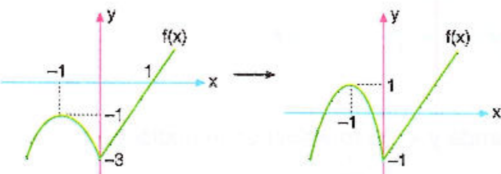


Yukarıda y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

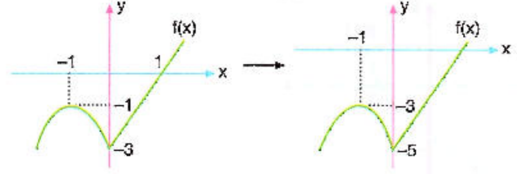
a. f(x) + 2 in grafiğini

b. f(x) – 2 in grafiğini çizelim.

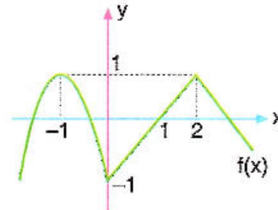
a. f(x) + 2 nin grafiğini elde edebilmek için f(x) fonksiyonunun grafiği y ekseninde 2 birim yukarı kaydırılır.



b. f(x) – 2 grafiğini elde edebilmek için f(x) fonksiyonunun grafiği y ekseninde 2 birim aşağı kaydırılır.



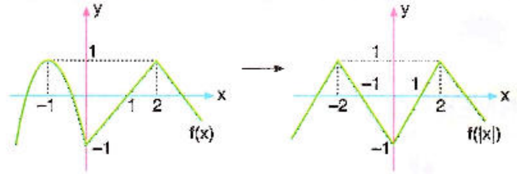
ÖRNEK 7



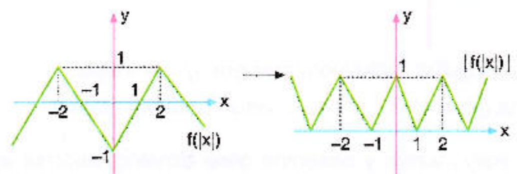
Yukarıda y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, |f(|x|)| + 2 nin grafiğini çizelim.

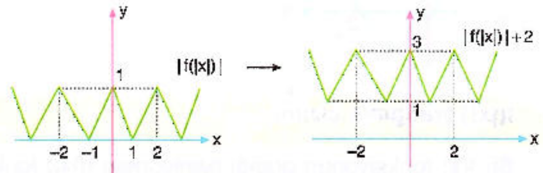
I. Öncelikle f(|x|) in grafiğini çizelim.



II. Şimdi elde ettiğimiz f(|x|) grafiğinden |f(|x|)| grafiğini çizelim.

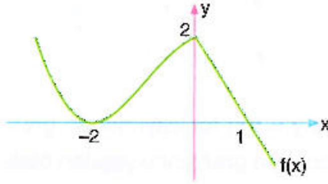


III. Son olarak |f(|x|)| grafiğini y ekseninde 2 birim yukarı ötelersek |f(|x|)| + 2 grafiği elde edilir.

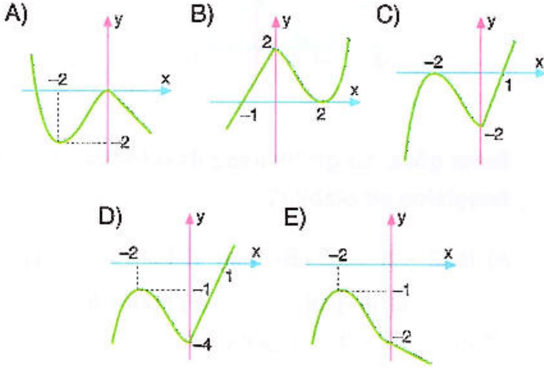


ADIM PEKİŞTİRME TESTİ

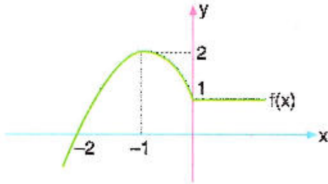
1.



Yukarıda grafiği verilen y = f(x) fonksiyonunun x eksenine göre simetriğinin grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

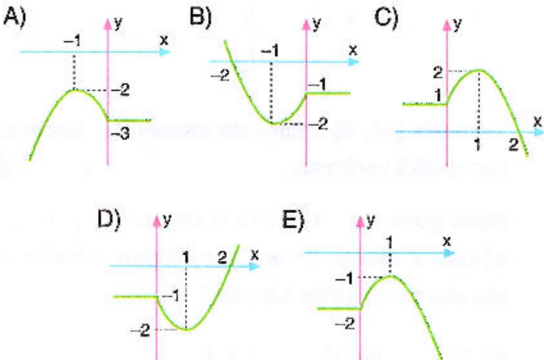


2.

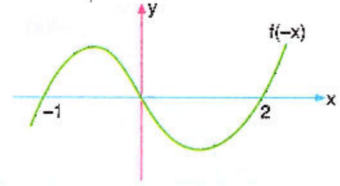


Yukarıda y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

f(x) in orijine göre simetriğinin grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

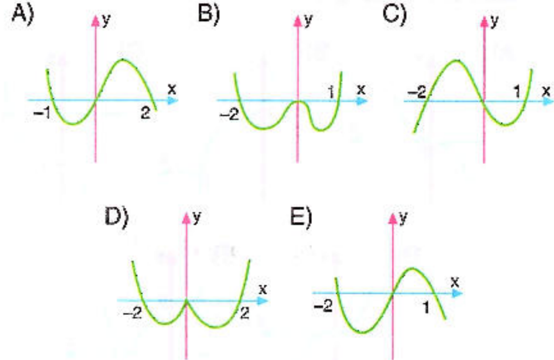


3.

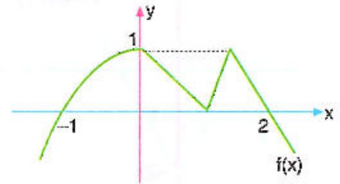


Yukarıda y = f(–x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, f(x) fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

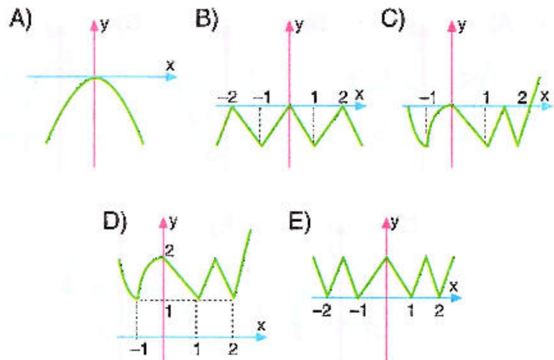


4.



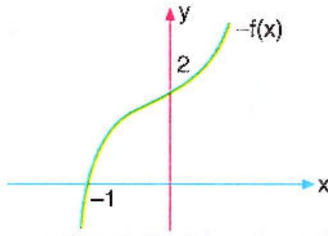
Yukarıda y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, f(|x|) – 1 fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



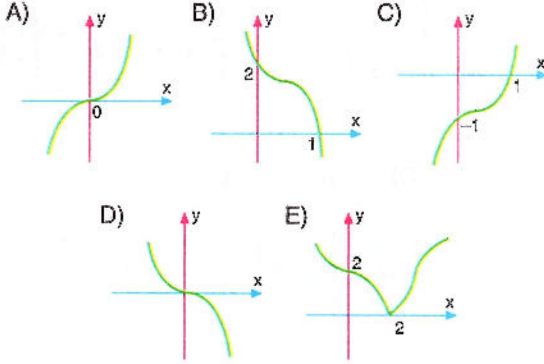
1) C 2) D 3) E 4) B

5.

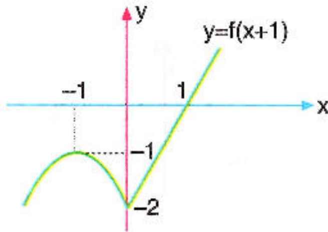


Yukarıda y = –f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, f(x – 1) fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

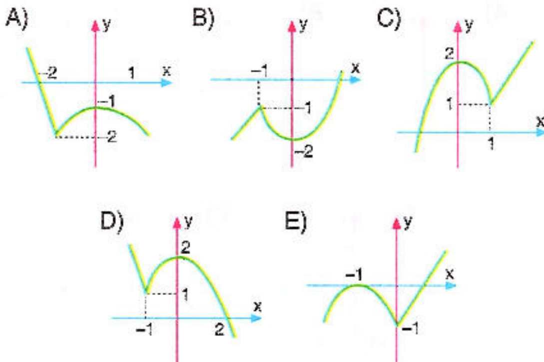


6.



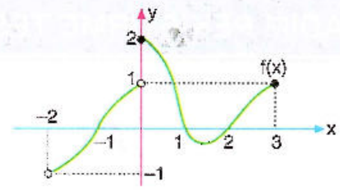
Yukarıda y = f(x+1) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, f(–x) fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

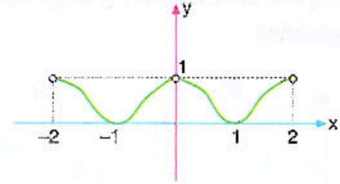


5) D 6) A

7.



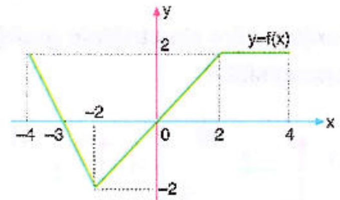
Yukarıda y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir. f fonksiyonunun grafiğinde yapılan öteleme ve simetri işlemleri sonucunda aşağıdaki grafik elde edilmiştir.



Buna göre, bu grafik aşağıdaki fonksiyonlardan hangisine ait olabilir?

A) $|f(x)| - 1$ B) $f(|x|) + 1$ C) $f(1 - x)$
D) $|f(-|x|)|$ E) $|f(x)| + f(x)$

8.



Yukarıda [–4, 4] aralığında tanımlı f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, f(x – 1) + 2 fonksiyonunun [–1, 4] aralığında x ekseni ile arasında kalan kapalı bölgenin alanı kaç birim karedir?

A) 16 B) 12 C) 11 D) 9 E) 8

7) D 8) B

ADIM GÜÇLENDİRME TESTİ - 1

1. $f(x) = -x^2 + 6x - 8$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesi A, görüntü kümesi B olduğuna göre, A∩B kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\infty, \infty)$ B) $(-\infty, 0]$ C) $(-\infty, 1]$ D) $(0, 1]$ E) $[0, \infty)$

2. $f(x) = 2 + \sqrt{3 - x}$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, f in ters fonksiyonu $f^{-1}(x)$ in en geniş tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $[0, 2]$ B) $[2, 3]$ C) $[0, 3]$ D) $[0, \infty)$ E) $[2, \infty)$

3. f: R – {0} → R olmak üzere,

$$f(x) = x - 4 - \frac{5}{x}$$

biçiminde tanımlı bir fonksiyon için $f(x) \in (-\infty, 0)$ koşuluna uyan x değerlerinin kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(0, 5)$ B) $(-\infty, -1)$ C) $(-\infty, 5)$ D) $(-\infty, -1) \cup (0, 5)$ E) $(-1, 0) \cup (5, \infty)$

1) C 2) E 3) D

4. I. $f(x) = x.e^x$

II. $f(x) = x^5 + x - \sin x$

III. $f(x) = 3^x$

IV. $f(x) = x.|x|$

V. $f(x) = x.\cos x$

Yukarıda verilenlerden kaç tanesi R den R ye tanımlı tek fonksiyondur?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

5. f: $R^+ \to R$ olmak üzere,

f(x) fonksiyonu artan olduğuna göre, aşağıdaki fonksiyonlardan hangisi aynı tanım aralığında daima azalandır?

A) $f(x) + 2x$ B) $f^2(x)$ C) $(f \circ f)(x)$ D) $\frac{1}{f(x)}$ E) $f(x - 2)$

6. $$f(x) = \frac{1}{x^2 + x + m} + \frac{1}{x^2 + x + 3 - m}$$

fonksiyonu her x gerçel sayısı için tanımlı olduğuna göre, m aşağıdakilerden hangisi olamaz?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{4}$ C) 1 D) $\frac{5}{2}$ E) $\frac{9}{2}$

4) C 5) D 6) E

APOIEMA

7. $f(x-1)=\begin{cases}2x-3 & x\geq 1\\ x-2 & x<1\end{cases}$

fonksiyonu veriliyor.

$f(x-a)=\begin{cases}2x+3 & x\geq -2\\ x+1 & x<-2\end{cases}$

olduğuna göre, a kaçtır?

A) –4 B) –2 C) 1 D) 2 E) 3

8. Z tam sayılar kümesini, N doğal sayılar kümesini göstermek üzere,

f: Z → N olmak üzere,

$f(x)=\begin{cases}x & x\in N\\ x^2 & x\notin N\end{cases}$

fonksiyonu tanımlanıyor.

Buna göre,

I. f bire birdir.

II. f örtendir.

III. f çift fonksiyondur.

ifadelerinden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III D) I ve II E) II ve III

9. $f(x)=\left||2x+6|-8\right|$ ve $g(x)=x$

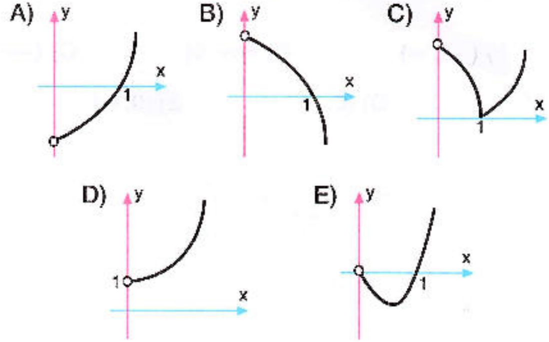
fonksiyonlarının grafikleri kaç farklı noktada kesişir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

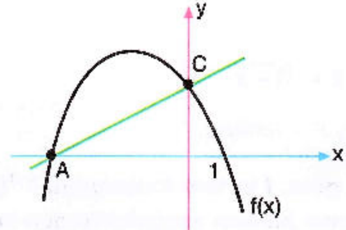
7) B 8) B 9) C

10. $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & x\geq 1\\ -x^2+1 & x<1\end{cases}$

fonksiyonunun x ∈ (0, ∞) için grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



11.

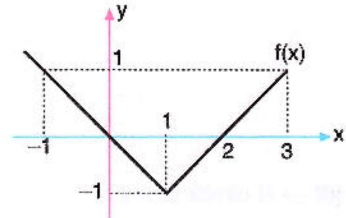


Yukarıdaki grafikte y = f(x) parabolü ile y = 2x + 4 doğrusu A ve C noktalarında kesişmiştir.

Buna göre, f(2) kaçtır?

A) –10 B) –8 C) –6 D) –4 E) –2

12.



Yukarıda y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, f(x) in denklemi aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $|x-2|-1$ B) $\left||x-2|-1\right|$ C) $|x-1|-3$ D) $\left||x-3|-2\right|-1$ E) $\left||x-2|-3\right|-1$

10) C 11) B 12) D

ADIM GÜÇLENDİRME TESTİ - 2

1. $f(x) = \sqrt{|x-1| + x - 3}$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\infty, \infty)$ B) $[2, \infty)$ C) $(1, \infty)$ D) $[-2, 2]$ E) $(0, \infty)$

2. **Gerçel sayılarda tanımlı aşağıdaki fonksiyonlardan hangisinin görüntü kümesi gerçel sayılar kümesidir?**

A) $f(x) = 2^x$ B) $f(x) = e^{-x}$ C) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ D) $f(x) = x^4 - x^3$ E) $f(x) = x^3 - x^2$

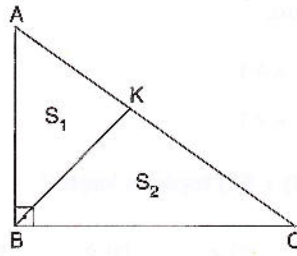
3. f çift ve g tek fonksiyondur.

- $f(a) + f(-a) = 6$
- $(gof)(-a) = -3$

olduğuna göre, g(–3) kaçtır?

A) 6 B) 3 C) 0 D) –3 E) –6

1) B 2) E 3) B

4. 

ABC üçgeninde

$[AB] \perp [AC]$

$|AB| = 6$

$|BC| = 8$

$K \in [AC]$ ve $|AK| = x$ olmak üzere,

f : x → "S_1 ve S_2 bölgelerinden büyük olanın alanı"

biçiminde bir fonksiyon tanımlanıyor.

Buna göre, f(x) aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\begin{cases} \frac{3x}{10} & 0<x<5 \\ \frac{4x}{5} & 5<x<10 \end{cases}$

B) $\begin{cases} \frac{4}{5}(10-x) & 0<x<5 \\ \frac{4x}{5} & 5<x<10 \end{cases}$

C) $\begin{cases} \frac{6x}{5} & 0<x<5 \\ \frac{8x}{5} & 5<x<10 \end{cases}$

D) $\begin{cases} \frac{12}{5}(10-x) & 0<x<5 \\ \frac{12x}{5} & 5<x<10 \end{cases}$

E) $\begin{cases} \frac{16x}{5} & 0<x<5 \\ \frac{16(10-x)}{5} & 5<x<10 \end{cases}$

5. **Aşağıdaki fonksiyonlardan hangisi (–1, 1) aralığında daima artandır?**

A) $f(x) = x^2 - 1$ B) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ C) $f(x) = -x + 1$ D) $f(x) = x^3 - 1$ E) $f(x) = \ln(1-x)$

4) D 5) D

6. f; R → R olmak üzere,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 1 \\ f(3x+1) & x < 1 \end{cases}$$

olduğuna göre, f(0) + f(2) toplamı kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

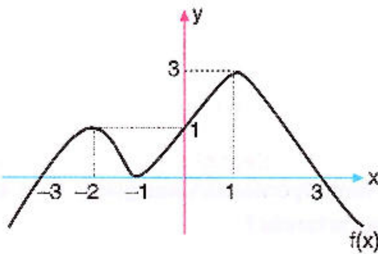
7. f: R → R ve f(x) ≠ 0 olmak üzere,

$$f(x) = \frac{|f(x)|}{f(x)} + x^2 + 6$$

olduğuna göre, f(–1) kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

8.



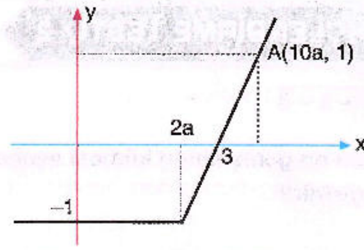
Yukarıda y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, |f(|x|) – 2| = 1 denklemini sağlayan kaç farklı x değeri vardır?

A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

6) D 7) E 8) B

9.



Yukarıda grafiği verilen f(x) fonksiyonunun kuralı aşağıdakilerden hangisidir? (a ∈ (0, 1))

A) $\begin{cases} -1 & x < 1 \\ x+1 & x \geq 1 \end{cases}$

B) $\begin{cases} -1 & x < 1 \\ 2x-6 & x \geq 1 \end{cases}$

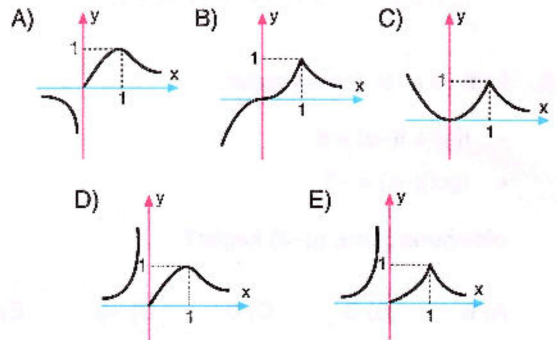
C) $\begin{cases} -1 & x < 2 \\ x-3 & x \geq 2 \end{cases}$

D) $\begin{cases} -1 & x < \frac{1}{2} \\ \frac{3x}{2} - \frac{9}{2} & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$

E) $\begin{cases} -1 & x < 1 \\ \frac{x}{2} - \frac{3}{2} & x \geq 1 \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \geq 1 \\ x^2 & 0 \leq x < 1 \\ -\frac{1}{x} & x < 0 \end{cases}$

fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



9) E 10) E

ADIM GÜÇLENDİRME TESTİ - 3

1. Z tam sayılar kümesini göstermek üzere

f: Z → (–1, 1) biçiminde tanımlanan f fonksiyonunun denklemi aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $f(x) = 1 - x$
B) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
C) $f(x) = \frac{1}{x}$
D) $f(x) = \frac{x+3}{x^2+4}$
E) $f(x) = 2^{-x}$

2. $f(x) = \begin{cases} 1+\sin x & 0 \le x \le \pi \\ 2\cos x & \pi \le x < 2\pi \end{cases}$

biçiminde tanımlanan f fonksiyonunun görüntü kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) [–1, 1]
B) [–1, 2)
C) [–2, 2)
D) [–2, 1]
E) [–2, 2]

3. **f tek, g çift fonksiyon olmak üzere,**

I. (f + g)(x) tek fonksiyondur.

II. (f.g)(x) tek fonksiyondur.

III. (gog)(x) çift fonksiyondur.

ifadelerinden hangileri <u>kesinlikle</u> doğrudur?

A) Yalnız I
B) Yalnız II
C) Yalnız III
D) I ve III
E) II ve III

4. f: R → R olmak üzere,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & x \le 2 \\ x - 4 & x > 2 \end{cases}$$

olduğuna göre, f(x) = 0 denklemini sağlayan x değerlerinin toplamı kaçtır?

A) 8
B) 7
C) 5
D) 4
E) 1

5. f: R → R olmak üzere,

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & x \ge 2 \\ x + 5 & x < 2 \end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor.

$f(f(a) - 13) = 1$

olduğuna göre, a kaçtır?

A) 9
B) 3
C) 2
D) –3
E) –4

6. $f(x) = |x + 2| \,.\, |x - 3| + |x + 1| \,.\, |x - 4|$

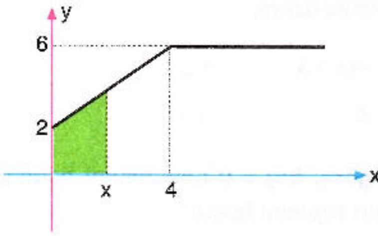
fonksiyonunun alabileceği en küçük değer kaçtır?

A) 8
B) 6
C) 4
D) 2
E) 0

1) D 2) E 3) E 4) C 5) B 6) C

APOIEMI

7.



Yukarıda grafiği verilen f fonksiyonu

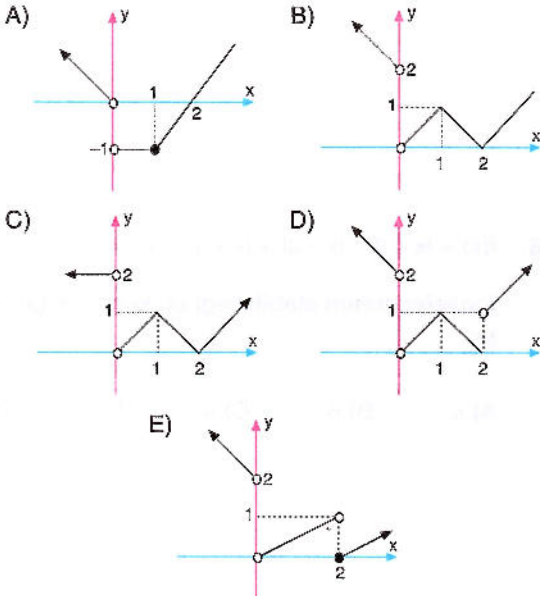
f: x → "Taralı Bölgenin Alanı" biçiminde tanımlanmıştır.

$f(a) = \frac{21}{2}$ olduğuna göre, a kaçtır?

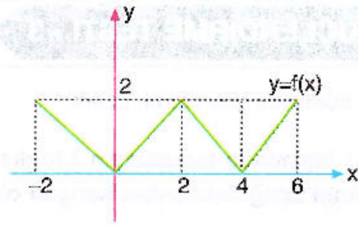
A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{2}$ C) 3 D) $\frac{7}{2}$ E) $\frac{13}{4}$

8. $f(x) = \left| |x-1| - \frac{|x|}{x} \right|$

fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



9.



Yukarıda y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, f(x) in denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $f(x) = ||x+2| - 2|$

B) $f(x) = ||x-2| - x + 4|$

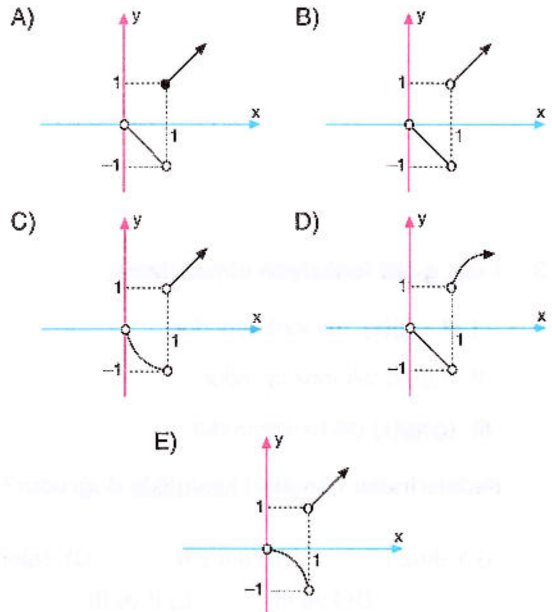
C) $f(x) = ||x| - 2| - 2$

D) $f(x) = ||x-2| - 2|$

E) $f(x) = ||x-2| + |x| - 8|$

10. $f(x) = |x-1| + \frac{\ln x}{|\ln x|}$

fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



7) C 8) B 9) D 10) B

ADIM GÜÇLENDİRME TESTİ - 4

1. $f(x) = \dfrac{1}{\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{x}{x+1}}$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesinde yer almayan kaç tane x gerçel sayısı vardır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

2. $f(x) = -x^2 + mx + n$

fonksiyonunun azalan olduğu en geniş aralık $[-2, \infty)$ olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi kesinlikle doğrudur?

A) $f(1) > f(-3)$ B) $f(3) > f(-2)$ C) $f(0) > f(m)$ D) $f(1) < f(2)$ E) $f(3) > f(-m)$

3. $f: R \to R$ olmak üzere,

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 & x \geq 0 \\ ax^3 + bx^2 & x < 0 \end{cases}$$

fonksiyonu tek fonksiyon olduğuna göre, f(a.b) kaçtır?

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

1) C	2) E	3) A

4. f, g: $R \to R$ olmak üzere,

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & x < 1 \\ x-3 & x \geq 1 \end{cases} \text{ ve } g(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases}$$

fonksiyonları veriliyor.

f(g(a)) = 0 olduğuna göre, a nın alabileceği değerler toplamı kaçtır?

A) 4 B) 2 C) 0 D) –3 E) –5

5. $f: R - \{1\} \to R$ olmak üzere,

$$f(x) = x - 2 + \frac{x^2 + 2x - 3}{|x-1|}$$

fonksiyonunun alabileceği en küçük değer kaçtır?

A) –5 B) –3 C) –1 D) 0 E) 3

6. f, g: $R \to R$ olmak üzere,

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 2 \\ 4-x & x < 2 \end{cases} \text{ ve } g(x) = |x|$$

fonksiyonları veriliyor.

Buna göre,

I. f(x) bire birdir.

II. f(2) = g(2) dir.

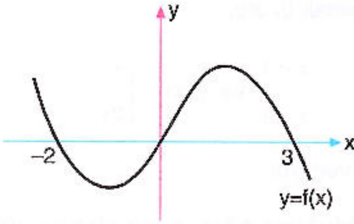
III. g nin tersi de bir fonksiyondur.

ifadelerinden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve II D) II ve III E) I, II ve III

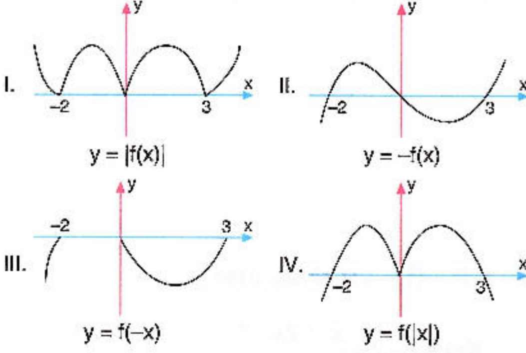
4) B	5) A	6) B

7.



Yukarıda y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

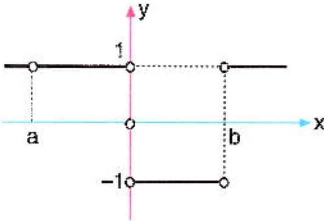
Buna göre,



grafiklerinin kaç tanesi doğrudur?

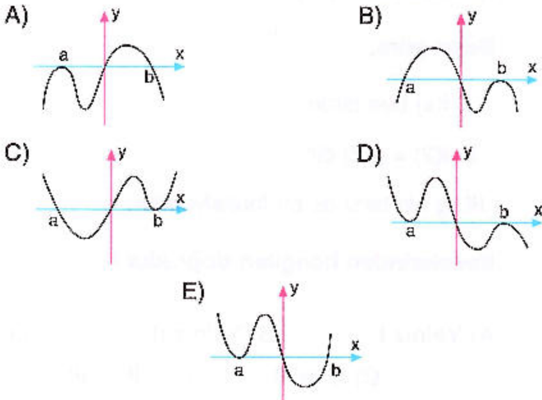
A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

8.

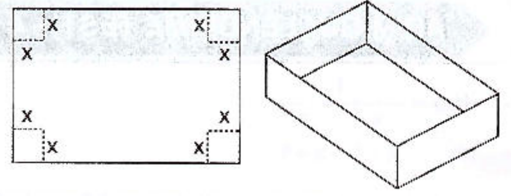


Yukarıdaki grafik $\frac{|f(x)|}{f(x)}$ fonksiyonuna aittir.

Buna göre, f(x) fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?

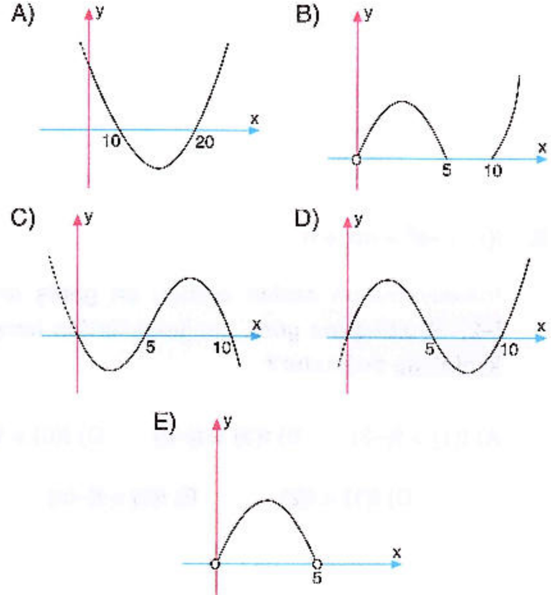


9.



Kenarları 10 cm ve 20 cm olan dikdörtgen biçiminde bir kartonun köşelerinden, kenar uzunluğu x cm olan kareler kesilerek yukarıdaki gibi üstü açık kutular elde ediliyor.

Kutunun hacmini ifade eden fonksiyon f(x) olduğuna göre, f(x) in grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



10. Fatih, bir kitabı, her gün bir önceki gün okuduğu sayfanın iki katı kadar okuyarak bitirecektir. Bu şekilde devam ettiğinde x + 2 günde 2^{x+7} sayfa kitap okuyacaktır.

f(x) fonksiyonu Fatih'in x günde okuduğu toplam sayfa sayısını göstermektedir.

Fatih ilk gün a sayfa kitap okuduğuna göre, f(a) değeri kaçtır?

A) 2^8 B) 2^{24} C) 2^{64} D) 2^{69} E) 2^{71}

7) B **8) E** **9) E** **10) D**

ADIM GÜÇLENDİRME TESTİ - 5

1. m, n∈R ve f: R → R olmak üzere,

$$f(mx+n)=\begin{cases}6x-f(n) & x>0\\ 4x-3 & x\le 0\end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, f(2m + n) kaçtır?

A) –3 B) 5 C) 9 D) 12 E) 15

2. R den R ye tanımlı aşağıdaki f(x) fonksiyonlarından hangisinin tersi fonksiyon <u>değildir</u>?

A) $\begin{cases}-2x & x\ge 0\\ -x & x<0\end{cases}$ B) $\begin{cases}x^2 & x\ge 0\\ -x^2 & x<0\end{cases}$

C) $\begin{cases}x & x\ge 0\\ 2x & x<0\end{cases}$ D) $\begin{cases}x^3 & x\ge 0\\ -x^3 & x<0\end{cases}$

E) $\begin{cases}x+1 & x\ge 4\\ 2x-3 & x<4\end{cases}$

3. $f(x) = |x-8| - |x-2|$

fonksiyonunun grafiği y = 4 doğrusu ile kaç farklı noktada kesişir?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

1) E 2) D 3) B

4. Bir havaalanı otopark ücret tarifesi aşağıdaki tablodaki gibidir.

Süre	Ücret
0-1 saat	10 TL
1-3 saat	15 TL
3-6 saat	20 TL
6-12 saat	50 TL
12-24 saat	100 TL

Örneğin, araç otoparkta 1 saat kalırsa ödenen ücret 10 TL, 2 saat kalırsa 15 TL, 7 saat kalırsa 50 TL dir.

x geçen süreyi göstermek üzere,

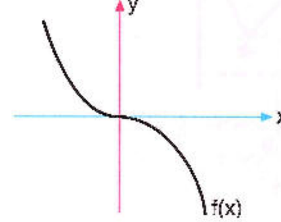
f : x → "Ödenen ücret"

biçiminde bir f fonksiyonu tanımlanıyor.

Buna göre, x ∈ [2, 5] için f fonksiyonunun grafiği ile x ekseni arasında kalan bölgenin alanı kaç birimkaredir?

A) 70 B) 55 C) 40 D) 35 E) 30

5.

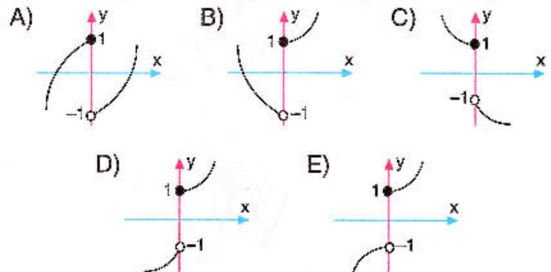


Yukarıda y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre,

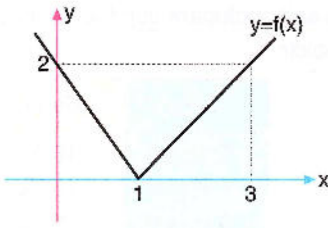
$$g(x)=\begin{cases}-f(x)+1 & x\ge 0\\ f(-x)-1 & x<0\end{cases}$$

fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



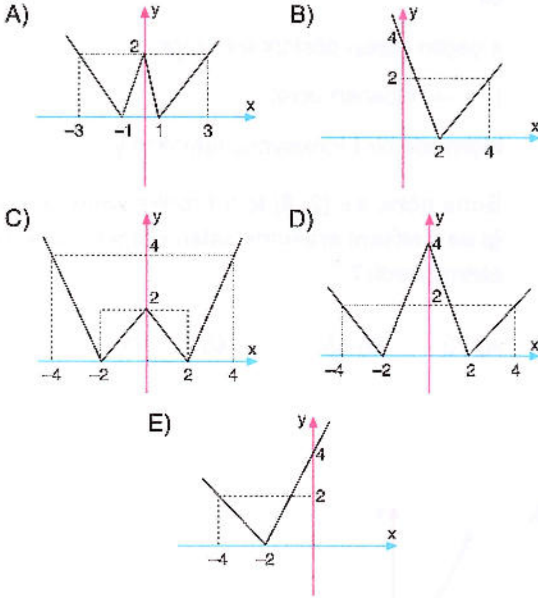
4) B 5) E

6.



Yukarıda y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, y = f(|x| – 1) fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



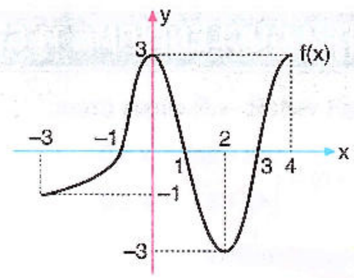
7. f: R → R olmak üzere,

$$f(x) = \begin{cases} x+4 & x \geq 0 \\ x^2 - 2 & x < 0 \end{cases}$$

olduğuna göre, 1 ≤ f(x) < 7 eşitsizliğini sağlayan kaç farklı x tam sayısı vardır?

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

8.



Yukarıda [–3, 4] aralığında tanımlı y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre,

I. |f(x) – 1| = 2 denklemini sağlayan beş farklı x değeri vardır.

II. f(–2) . f(2) > 0 dır.

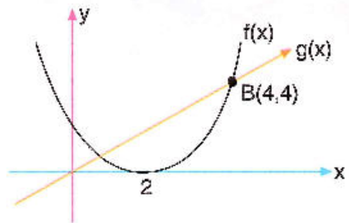
III. (fof)(3) < 0 dır.

IV. [–1, 1] aralığında f(x) artandır.

ifadelerinden kaç tanesi doğrudur?

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

9.



Yukarıda f(x) parabolü ile orijinden ve B(4, 4) noktasından geçen g(x) doğrusu verilmiştir.

Buna göre, g(x) > f(x) eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) (4, ∞) B) (0, 4) C) $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$ D) (2, 4) E) (1, 4)

6) D 7) D

8) C 9) E

ADIM GÜÇLENDİRME TESTİ - 6 ÇÖZÜMLÜ

1. $f : A \rightarrow R$ olmak üzere,

$$f(x) = \frac{\sqrt{36 - x^2}}{\ln(x+2)}$$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesindeki farklı tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

A) 13 B) 14 C) 15 D) 20 E) 21

2. $f : A \rightarrow B$ olmak üzere

$$f(x) = \begin{cases} -x+6 & x \geq 4 \\ 2x-4 & x < 4 \end{cases}$$

fonksiyonu örten olduğuna göre, B kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $[4, \infty)$ B) $(-\infty, 2]$ C) $(-\infty, 4)$ D) $[2, 4]$ E) $[2, \infty)$

3. $f : R \rightarrow R$ olmak üzere,

$$f(x) = \begin{cases} 3x-2 & x \geq 0 \\ ax+b & x < 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan f fonksiyonu çift fonksiyon olduğuna göre, a – b farkı kaçtır?

A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

1) E 2) C 3) A

4. f^{-1}, f fonksiyonunun tersi olmak üzere,

$$f(x) = \begin{cases} 4x+b & x < 2 \\ ax+1 & x \geq 2 \end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor.

$f^{-1}(3) = 1$ olduğuna göre, $f^{-1}(a.b)$ kaçtır?

A) –13 B) $-\frac{1}{2}$ C) 1 D) 5 E) 10

5. $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 5}{|x-3| - 2}$

fonksiyonunun en geniş tanım aralığında parçalı fonksiyon olarak yazılışı aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\begin{cases} x+1 & x \geq 3 \\ x-3 & x < 3 \end{cases}$

B) $\begin{cases} x-1 & x > 3 \\ 5-x & x < 3 \end{cases}$

C) $\begin{cases} x-1 & x \in [3, \infty) - \{5\} \\ 5-x & x \in [-\infty, 3) - \{1\} \end{cases}$

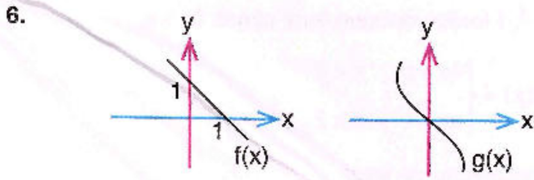
D) $\begin{cases} 5-x & x \geq 3 \\ x-1 & x < 3 \end{cases}$

E) $\begin{cases} 1-x & x \in [3, \infty) - \{5\} \\ x-5 & x \in [-\infty, 3) - \{1\} \end{cases}$

4) B 5) C

APOTEMİ

6.

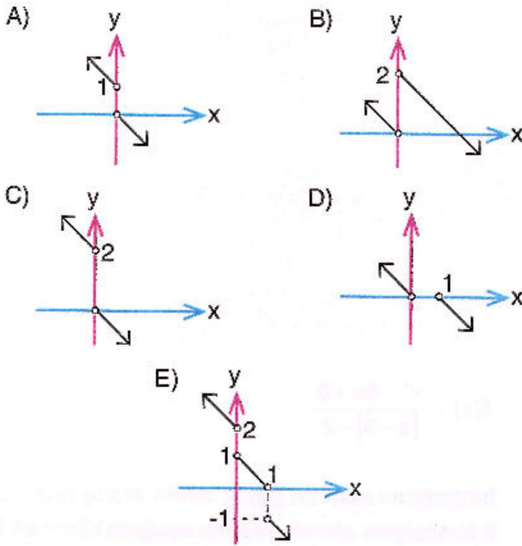


Yukarıda f(x) ve g(x) fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

Buna göre,

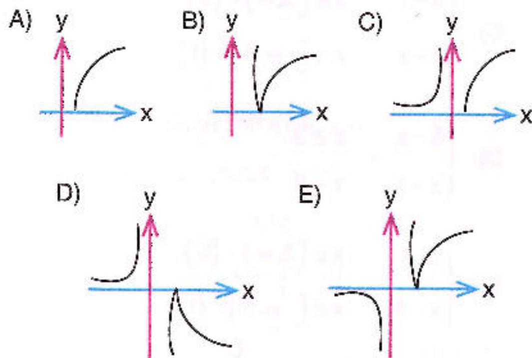
$$h(x) = f(x) + \frac{g(x)}{|g(x)|}$$

fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



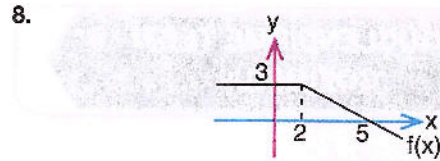
7. $f(x) = \begin{cases} |\ln x| & x > 0 \\ \dfrac{1}{x} & x < 0 \end{cases}$

fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



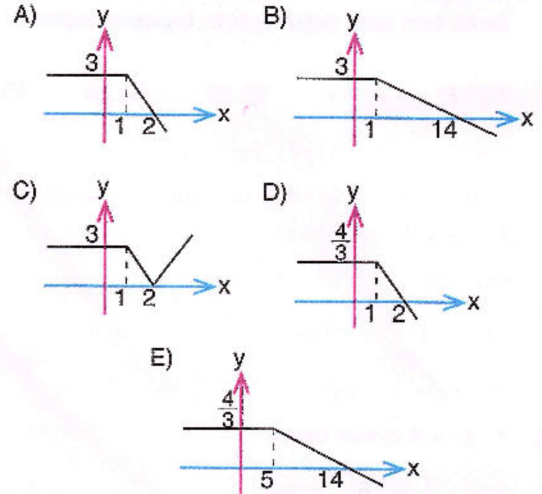
6) C 7) E

8.



Yukarıda y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, y = f(3x − 1) fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



9. Gerçek sayılarda tanımlı $f(x) = |e^{-x} + 1|$ fonksiyonu veriliyor.

Buna göre,

I. f(x) azalandır.

II. f(x) bire birdir.

III. f in görüntü kümesi (2, ∞)aralığıdır.

ifadelerinden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III D) I ve II E) I, II ve III

8) A 9) D

ADIM GÜÇLENDİRME TESTİ - 6 ÇÖZÜMLER

1. f in en geniş tanım kümesi için

★ $\sqrt{36-x^2}$; $36 - x^2 \geq 0$ $\quad 36 \geq x^2 \Rightarrow -6 \geq x \geq 6$

$\Rightarrow x \in [-6, 6]$

★★ $\ln(x+2)$; $x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2$

Ayrıca $\ln(x + 2)$ paydada yer aldığından

$\ln(x + 2) \neq 0$ olmalıdır.

$x = -1$ için $\ln(-1 + 2) = \ln 1 = 0$ olduğundan

$x \neq -1 \Rightarrow x \in (-2, \infty) - \{-1\}$

★ ve ★★ da elde ettiğimiz sonuçların kesişimi f in en geniş tanım kümesini oluşturur.

$([-6, 6]) \cap ((-2, \infty) - \{-1\}) = (-2, 6] - \{-1\}$

Bu aralıkta yer alan tüm sayılar toplamı

$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ bulunur.

Cevap E

2. Fonksiyonun her bir parçasının görüntü kümelerini bulup sonuçları birleştirerek f in görüntü kümesini bulalım.

★ $x \geq 4$ için $-x + 6$ ifadesinin görüntü kümesini bulalım.

$x \geq 4 \Rightarrow -x \leq -4 \Rightarrow -x + 6 \leq 2$

Buna göre, $-x + 6$ nın görüntüsü $(-\infty, 2]$ aralığındadır.

★★ $x < 4$ için $2x - 4$ ifadesinin görüntü kümesini bulalım.

$x < 4 \Rightarrow 2x < 8 \Rightarrow 2x - 4 < 4$

Buna göre, $2x - 4$ ün görüntüsü $(-\infty, 4)$ aralığındadır.

★ ve ★★ daki sonuçları birleştirirsek f in görüntü kümesini buluruz. $(-\infty, 2] \cup (-\infty, 4) = (-\infty, 4)$

Cevap C

3. f çift fonksiyon ise her x için $f(x) = f(-x)$ olmalıdır. Örneğin $f(1) = f(-1)$ olmalıdır.

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 3.1 - 2 = 1 \\ f(-1) = a.(-1) + b \end{array}\right\} \Rightarrow -a + b = -1 \text{ bulunur.}$$

$-a + b = 1 \Rightarrow a - b = -1$ bulunur.

Cevap A

APOTEMI

4. $f^{-1}(3) = 1 \Rightarrow f(1) = 3$ tür.

$f(1) = 4.1 + b = 3 \Rightarrow b = -1$ bulunur.

Parçalı bir fonksiyonun tersinin olabilmesi için kritik noktada iki parçanın sonuçları eşit olmalıdır.

Yani $4x + b$ ve $ax + 1$ ifadeleri $x = 2$ için eşit olmalıdır. $b = -1$ bulmuştuk. O halde

$4.2 - 1 = a.2 + 1 \Rightarrow 7 = 2a + 1$

$\Rightarrow a = 3$ bulunur.

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 1 & x < 2 \\ 3x + 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

$f^{-1}(a.b) = f^{-1}(-3)$ değerini arıyoruz.

$f^{-1}(-3) = k$ olsun. Bu durumda $f(k) = -3$ olur.

$x \geq 2$ için $3x + 1 \neq -3$ tür.

$x < 2$ için $4x - 1 = -3 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ olur.

O halde $f^{-1}(-3) = -\frac{1}{2}$ bulunur.

Cevap B

5. f fonksiyonunun paydasında yer alan mutlak değerli |x − 3| ifadesinin kritik noktası 3 olduğundan bu değere göre, fonksiyonu parçalı fonksiyon biçiminde yazalım.

★ $x \geq 3$ için $\dfrac{x^2-6x+5}{x-3-2}=\dfrac{(x-5)(x-1)}{x-5}=x-1$

$x \geq 3$ için payda sıfırdan farklı olmalı o nedenle $x \neq 5$ tir.

Bu durumda $x \in [3, \infty) - 5$ için $f(x) = x - 1$

★★ $x < 3$ için $\dfrac{x^2-6x+5}{-x+3-2}=\dfrac{(x-5)(x-1)}{-(x-1)}=5-x$

$x < 3$ için payda sıfırdan farklı olmalı o nedenle $x \neq 1$ dir.

Bu durumda $x \in (-\infty, 3) - \{1\}$ için $f(x) = 5 - x$ olur.

Buna göre, f fonksiyonu parçalı olarak aşağıdaki gibi yazılır.

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & x\in[3,\infty)-\{5\} \\ 5-x & x\in(-\infty,3)-\{1\} \end{cases}$$

Cevap C

6. f in grafiği yardımıyla denklemi $f(x) = -x + 1$ olarak bulunur. Bu durumda h(x) aşağıdaki gibi olur.

$$h(x)=-x+1+\frac{g(x)}{|g(x)|}$$

g(x) in grafiğine bakılırsa

$x > 0$ için $g(x) < 0$

$x < 0$ için $g(x) > 0$

$x = 0$ için $g(x) = 0$ dır.

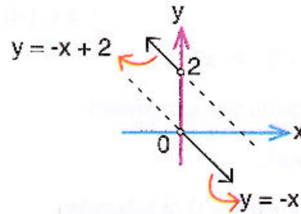
Bu durumda h(x) aşağıdaki gibi parçalı fonksiyon olarak yazılabilir.

$$h(x)=\begin{cases} -x+1+\dfrac{g(x)}{-g(x)} & x>0 \\ -x+1+\dfrac{g(x)}{g(x)} & x<0 \end{cases}$$

O halde

$$h(x)=\begin{cases} -x & x>0 \\ -x+2 & x<0 \end{cases}$$

Dikkat edilirse $x = 0$ için $g(x) = 0$ olduğundan h(x) tanımsız olur. h(x) in grafiği aşağıdaki gibi olacaktır.

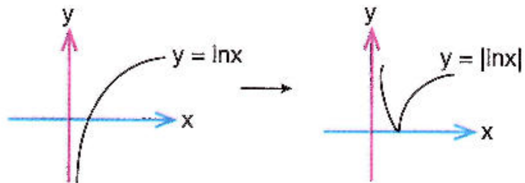


Cevap C

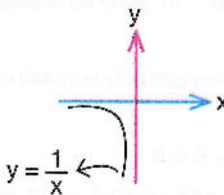


7. f in parçalarının grafiklerini ayrı ayrı çizip sonra bir grafikte birleştirelim.

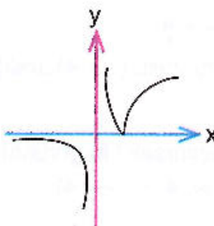
★ $x > 0$ için



★★ $x < 0$ için

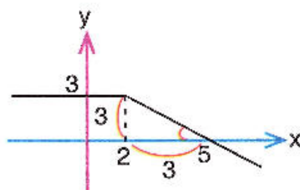


O halde iki grafiği birleştirirsek f in grafiği aşağıdaki gibi olacaktır.



Cevap E

8. f in grafiğine bakılarak f parçalı fonksiyon biçiminde yazılabilir.



★ $x \leq 2$ $f(x) = 3$ tür.

★★ $x > 2$ için grafikteki doğrunun denklemini yazalım.

Doğrunun eğimi -1 ve $(5, 0)$ noktasından geçmekte. Eğimi -1 ve bir noktası bilinen doğru denkleminden doğrunun denklemi $-x + 5$ bulunur.

O halde

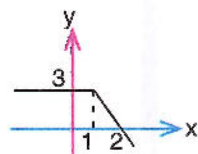
$$h(x) = \begin{cases} 3 & x \leq 2 \\ -x+5 & x > 2 \end{cases}$$

Şimdi f(x) yardımıyla f(3x – 1) fonksiyonunu bulalım.

$$f(3x-1) = \begin{cases} 3 & 3x-1 \leq 2 \\ -3x+6 & 3x-1 > 2 \end{cases}$$

$$f(3x-1) = \begin{cases} 3 & x \leq 1 \\ -3x+6 & x > 1 \end{cases}$$

Buna göre, f(3x – 1) grafiği aşağıdaki gibi olur.



NOT:

Yukarıda sorunun klasik yolla çözümü verilmiştir. Grafik üzerindeki değerleri kullanarak seçeneklerden eleme yöntemiyle de çözüm yapılabilir.

Örneğin;

Verilen grafikte $f(5) = 0$ dır.

f(3x – 1) fonksiyonunda

$3x - 1 = 5 \Rightarrow x = 2$

$x = 2$ için $f(3x - 1) = 0$ dır.

Buna uymayan şıklar elenerek doğru seçenek yine bir başka değer verilerek bulunmaya çalışılır.

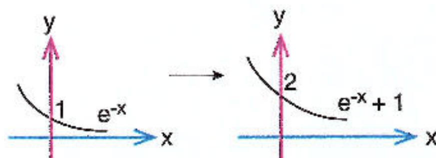
Cevap A

9. $e^{-x} + 1$ daima pozitif olduğundan

$f(x) = |e^{-x} + 1| = e^{-x} + 1$ olur.

f in grafiğini çizersek istenenleri kolayca yorumlayabiliriz.

Önce e^{-x} grafiğini çizip bu grafikten $e^{-x} + 1$ grafiğini elde edelim.



$e^{-x} + 1$ grafiğine bakılırsa azalan ve bire bir olduğu görülür. I ve II doğrudur. Görüntü kümesini bulmak için x eksenine paralel doğrular çizilirse görüntü kümesinde 2'den küçük elemanlar içerdiği görülecektir. Bu nedenle görüntü kümesi $(2, \infty)$ aralığı değildir. III yanlıştır.

Cevap D



MARATON TESTLERİ

If you can see it, you may have a shot.

MARATON TESTİ - 1

1. Pozitif tam sayılarda tanımlı f fonksiyonu için,

- $f(x + 3) = f(x) + 6$
- $f(2x) = 2f(x) + 3$
- $f(2) = 1$

olduğuna göre, f(10) + f(15) toplamının değeri kaçtır?

A) 44 B) 40 C) 36 D) 35 E) 29

2. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ olmak üzere,

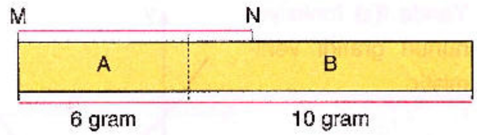
f: A → A biçiminde tanımlı birebir ve örten f fonksiyonu için

$f(2) + f(4) = f(6)$

eşitliği geçerli olduğuna göre, bu koşula uyan kaç farklı f fonksiyonu yazılabilir?

A) 144 B) 72 C) 60 D) 36 E) 24

3.



Şekildeki çubuk aynı kalınlıkta ve homojen yapıda A ve B parçalarından oluşmaktadır. Bu parçaların uzunlukları sırasıyla 3 cm ve 5 cm, ağırlıkları ise sırasıyla 6 gram ve 10 gramdır.

Bu çubukla ilgili olarak

f : x → "MN doğru parçasının ağırlığı"

biçiminde bir f fonksiyonu tanımlanıyor.

Buna göre, f in $x \in [4, 6]$ için denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $f(x) = x + 4$ B) $f(x) = 2x$

C) $f(x) = \frac{2x+3}{4}$ D) $f(x) = \frac{4x+8}{3}$

E) $f(x) = 2x + 2$

4. Tanımlı oldukları aralıklarda f ve g fonksiyonları

$f(x) = \min\{x^2 - x - 8,\ x\}$

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \geq 0 \\ \sqrt{2-|x|} & -2 \leq x < 0 \end{cases}$$

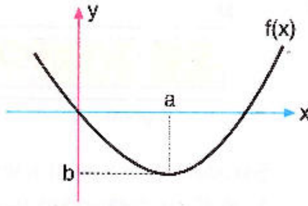
biçiminde verilmiştir.

Buna göre, g(x) fonksiyonunun görüntü kümesinin en küçük elemanı kaçtır?

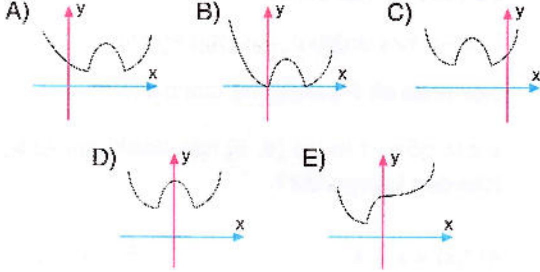
A) –10 B) –8 C) –3 D) 0 E) 1

1) A 2) B 3) B 4) B

6. Yanda f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre, $|f(x + a)| - b$ fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?



7. $F_1(x) = x^3$

$F_2(x) = x^4$

$F_3(x) = x^5$

⋮

$F_n(x) = x^{n+2}$

olduğuna göre,

$(F_n \circ F_{n-1} \circ \dots \circ F_3 \circ F_2 \circ F_1)(x)$

fonksiyonu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $(x^{n+2})^2$ B) x^{n^2+n} C) x^{n+3}

D) $x^{\frac{(n+2)!}{2}}$ E) $x^{(n+2)!}$



6. f: [–2, 2] → R , $f(x) = e^x$

g: [–1, 3] → R , $g(x) = x^4 - 1$

h: [–4, 1] → R , $h(x) = x^5 + 1$

Yukarıda verilen fonksiyonlardan hangileri bire birdir?

A) Yalnız f B) Yalnız h C) f ve h

D) f ve g E) g ve h

8. Reel sayılarda tanımlı sıfırdan farklı bir f fonksiyonu her a, b ∈ R için

$f(a + b) + f(a - b) = 2.(f(a) + f(b))$

şartını sağlamaktadır.

Buna göre, aşağıdakilerden hangisi kesinlikle doğrudur?

A) $f(0) = -1$ B) $f(-x) = -f(x)$

C) $f(x - y) = f(x) - f(y)$ D) $f(-x) = f(x)$

E) $f(x + y) = f(x) + f(y)$

5) D 6) C 7) D 8) D

MARATON TESTİ - 2

1. $f(x^2 - 2x) = |x^2 - 3|$

olduğuna göre, f(1) kaçtır?

A) 3 B) $2\sqrt{2}$ C) 2 D) 1 E) $\frac{1}{2}$

2. $f(x) = |x^2 - 6| - 2m$

fonksiyonu veriliyor.

f(x) = 0 denklemini sağlayan 3 farklı x gerçel sayısı olduğuna göre, f(m) değeri kaçtır?

A) –3 B) –1 C) 0 D) 18 E) 30

3. f: A → B ve g: B → A

fonksiyonları veriliyor.

I_A, A üzerindeki birim fonksiyon ve gof = I_A olduğuna göre,

I. f fonksiyonu bire birdir.

II. g fonksiyonu bire birdir.

III. g fonksiyonu örtendir.

ifadelerinden hangileri kesinlikle doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III D) I ve II E) I ve III

4. Doğal sayılar kümesinde tanımlı bir f fonksiyonu her x doğal sayısı için

$$f(x) = \begin{cases} f(x-5) & x \geq 5 \\ 2x+30 & 0 \leq x < 5 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanıyor.

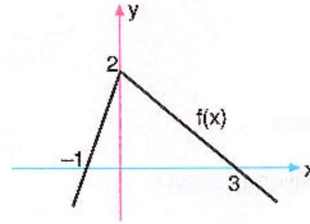
Örneğin:

f(12) = f(7) = f(2) = 34

Buna göre, f(AB) < AB eşitliğini sağlayan kaç farklı AB iki basamaklı sayısı vardır?

A) 72 B) 65 C) 56 D) 52 E) 51

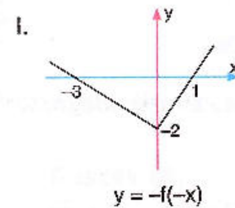
5.



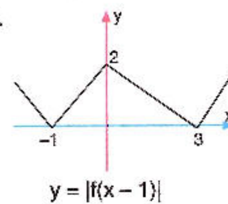
Yukarıda f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre,

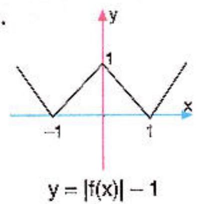
I.



II.



III.



grafiklerinden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve II D) II ve III E) I, II ve III

1) B 2) A 3) E 4) B 5) A

MARATON TESTİ - 3

1. Uygun koşullarda tanımlı f fonksiyonu için

$$f(x) = \frac{(m+1)x+1}{mx-2m+5}$$

$(fof)(x) = x$

eşitlikleri geçerli olduğuna göre, m kaçtır?

A) $-\frac{1}{2}$ B) −1 C) 0 D) 2 E) 6

2. f: R → R olmak üzere

$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ fonksiyonu veriliyor.

Buna göre,

I. f tek fonksiyondur.

II. f örtendir.

III. f bire birdir.

ifadelerinden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III D) I ve II E) I, II ve III

3. f: R → R olmak üzere,

$$f(x) = \begin{cases} x^2-4x-1 & x \geq 1 \\ g(x) & x < 0 \end{cases}$$

fonksiyonu örten olduğuna göre, g(x) aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) −x B) −x − 5 C) x − 6 D) −x + 6 E) x − 5

4. A = {1, 2, 3, 4, ..., 99} olmak üzere,

f: A → A biçiminde tanımlı bire bir ve örten f fonksiyonu için,

f(1) = 99

f(2) = 98

f(3) = 97

⋮

f(99) = 1

eşitlikleri geçerli olduğuna göre,

$f(x-2) = f(x) + 2$

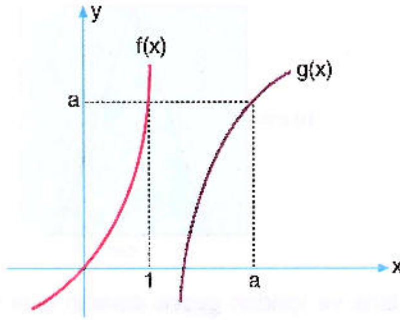
koşulunu sağlayan kaç farklı x değeri vardır?

A) 99 B) 98 C) 97 D) 49 E) 48

APOEMİ

1) E 2) A 3) E 4) C

5.



Yukarıda f(x) ve g(x) fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

Buna göre,

I. $(fog)(a) = 1$

II. $f^{-1}(1) < g^{-1}(1)$

III. $(gof)(a) = a$

ifadelerinden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve II
D) II ve III E) I, II ve III

6. Gerçel değerli ve gerçel değişkenli

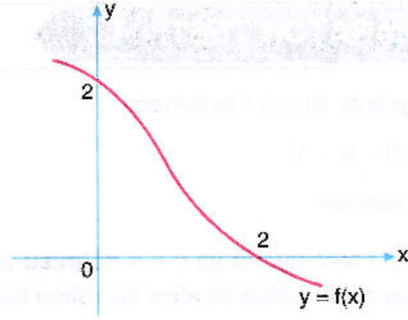
$f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ ve $g(x) = \frac{2-x}{2+x}$

fonksiyonları veriliyor.

Buna göre, fog bileşke fonksiyonunun en geniş tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) R – {1} B) R – {–2} C) R – {–2, 0}
D) R – {–2, 1} E) R – {0, 1}

7.



Yukarıda y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$x \in [-4, 0]$ olmak üzere,

$$F(x) = \begin{cases} -x-4 & ; f(-x) < 0 \\ -2 & ; f(-x) \geq 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan F(x) fonksiyonu ile eksenler arasında kalan bölgenin alanı kaç birimkaredir?

A) 16 B) 12 C) 8 D) 6 E) 4



8. $f(x) = |x - 2|$

$g(x) = |2x + 1|$

fonksiyonları veriliyor.

Buna göre, $(gof)(x) = x$ eşitliğini sağlayan x değerlerinin toplam kaçtır?

A) $\frac{14}{3}$ B) $\frac{8}{3}$ C) 2 D) 1 E) $\frac{1}{2}$

5) B **6) C** **7) D** **8) A**

MARATON TESTİ - 4

1. Gerçel sayılarda tanımlı f fonksiyonu

$f(x) = |x - 2| + |x + 1|$

biçiminde veriliyor.

Buna göre, f fonksiyonu ile y = 4 doğrusu arasında kalan sınırlı bölgenin alanı kaç birim karedir?

A) $\frac{15}{4}$ B) 4 C) $\frac{7}{2}$ D) 3 E) $\frac{5}{2}$

2. $f: Z \rightarrow Z$ olmak üzere,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ x & x \leq 0 \end{cases}$$

olduğuna göre,

I. f bire birdir.

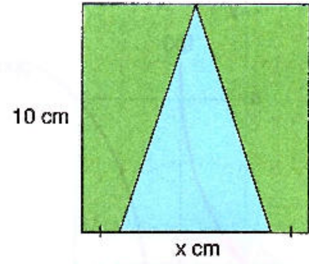
II. f örten değildir.

III. f in görüntü kümesi $(-\infty, 0] \cup (1, \infty)$ dir.

ifadelerinden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III D) I ve II E) I, II ve III

3.



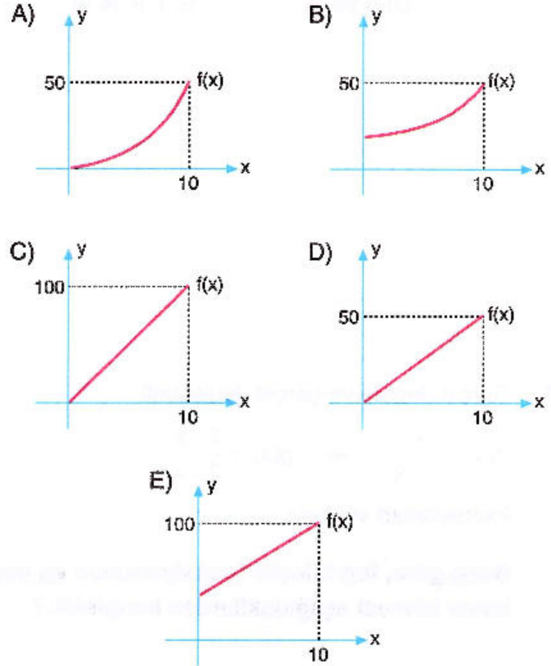
Bir tarla ve içinden geçen derenin üstten görünümü, bir kenarı 10 cm olan kare biçiminde bir haritayla yukarıda gösterilmiştir. Haritada mavi renkli üçgen dereyi göstermektedir.

Haritada, derenin en geniş kısmının görüldüğü x cm lik bölümü, bulunduğu kenarın köşelerine eşit uzaklıktadır.

f : x → "Haritada derenin kapladığı alan"

biçiminde bir f fonksiyonu tanımlanıyor.

Buna göre, aşağıdakilerden hangisinde f in grafiği doğru olarak çizilmiştir?



1) C 2) B 3) D

4. f: R → R fonksiyonu

$$f(x)=\begin{cases}3.\sin x & \cos x \geq 0\\ 1+\cos x & \cos x < 0\end{cases}$$

biçiminde tanımlanmaktadır.

Buna göre (−π, π) açık aralığının f fonksiyonu altındaki görüntüsü aşağıdakilerden hangisidir?

A) [1, 3] B) [0, 3] C) [−3, 3] D) [−3, 3] − {1} E) [−1, 1]

5. f: R → R olmak üzere,

$$f(x)=\begin{cases}3x-1 & x<1\\ 6x-5 & x\geq 1\end{cases}$$

olduğuna göre, $f\left(\frac{x-2}{3}\right)$ fonksiyonu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

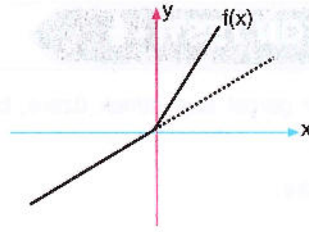
A) $\begin{cases}x-3 & x<1\\ 2x+9 & x\geq 1\end{cases}$ B) $\begin{cases}x-2 & x<1\\ 2x-8 & x\geq 1\end{cases}$

C) $\begin{cases}x-2 & x<5\\ 2x-8 & x\geq 5\end{cases}$ D) $\begin{cases}3x-1 & x<1\\ 6x-5 & x\geq 1\end{cases}$

E) $\begin{cases}x-3 & x<5\\ 2x-9 & x\geq 5\end{cases}$

4) C 5) E

6.

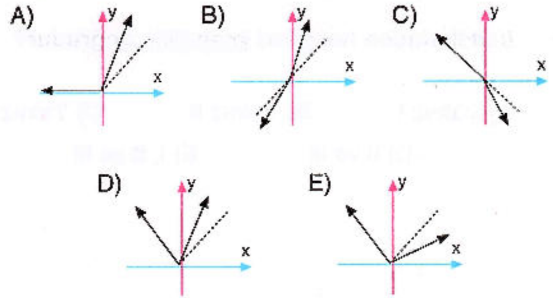


Yukarıda f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre,

$$g(x)=\frac{f(x)-|f(x)|}{2}+f(x)$$

fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?



7. f: [1, 9] → R olmak üzere,

$f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{9-x}$

fonksiyonunun görüntü kümesinin <u>en büyük</u> elemanı kaçtır?

A) $3\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) 3 D) 4 E) 5

6) B 7) D

MARATON TESTİ - 5

1. a sıfırdan farklı bir gerçel sayı olmak üzere, bir f fonksiyonu ile ilgili

- f çift fonksiyondur.
- $f(a-1) = a$

bilgileri veriliyor.

a sayısı f in tanım kümesinin bir elemanı olduğuna göre,

I. $f(0) = 0$

II. $f(1-a) = a$

III. $a < -1$ ise $f(a) < 0$ dır.

ifadelerinden hangileri kesinlikle doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III D) II ve III E) I, II ve III

2. Gerçel sayılarda tanımlı ve bire bir f, g ve h fonksiyonları ile ilgili,

$(gof)(x) = 2 - 3x$

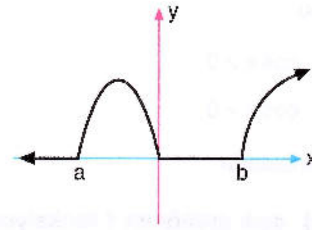
$(hof)(x) = 3x + 1$

eşitlikleri geçerlidir.

g(2) = 5 olduğuna göre, h(2) kaçtır?

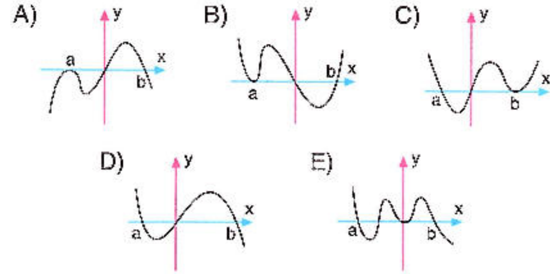
A) –3 B) –2 C) –1 D) 0 E) 4

3.



Yukarıda $\dfrac{|f(x)| - f(x)}{2}$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, f(x) fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?



4. f : R → R olmak üzere,

$f(x) = a \cdot x$

fonksiyonu için

I. $f(-x) = -f(x)$

II. $f(x^2 - y^2) = f^2(x) - f^2(y)$

III. $f(k \cdot x) = k \cdot f(x)$

eşitliklerinden hangileri her zaman doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III D) I ve III E) I, II ve III

1) B 2) B 3) D 4) D

5. A = {1, 2, 3} kümesi veriliyor.

f : A → A

g : A → A

biçiminde f ve g fonksiyonları tanımlanıyor.

Buna göre,

(fog)(x) = 1

eşitliğini sağlayan kaç farklı (f, g) fonksiyon çifti tanımlanabilir?

A) 3 B) 9 C) 12 D) 27 E) 81

6. f: R → R , $f(x) = x^2 - 3$ olmak üzere,

g: A → B

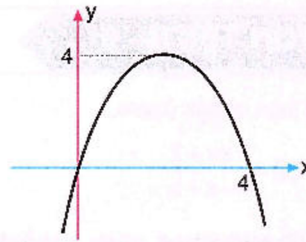
biçiminde tanımlı bir g(x) fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, A kümesi aşağıdakilerden hangisi olursa gof bileşke fonksiyonu tanımsız olur?

A) (3, ∞) B) (2, ∞) C) [1, ∞)

D) [–3, ∞) E) [–4, ∞)

7.

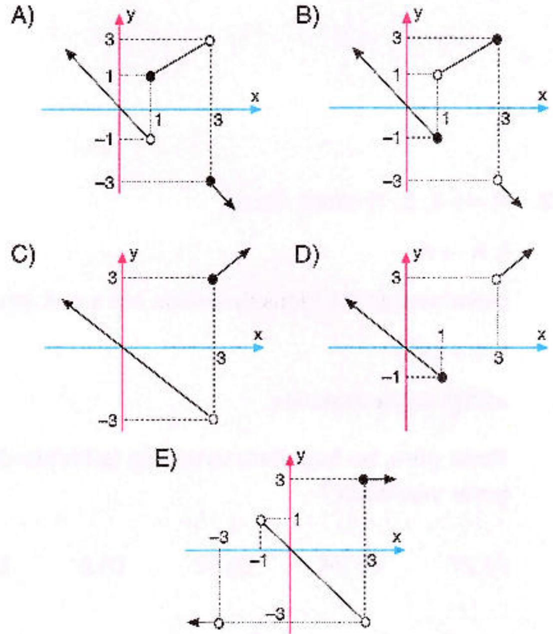


Yukarıda f(x) parabolünün grafiği verilmiştir.

Buna göre,

$$g(x) = \begin{cases} -x & f(x) \le 3 \\ x & f(x) > 3 \end{cases}$$

biçiminde tanımlı g(x) fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



5) D 6) E 7) B

MARATON TESTİ - 6

1. a ve b birer gerçel sayı olmak üzere,

$f: R - \{b\} \to R, \quad f(x) = \dfrac{ax+2}{-x+b}$

fonksiyonu bire bir olduğuna göre, aşağıdakilerden hangisi kesinlikle yanlıştır?

A) a + b = 2 B) a.b = –2 A) a + b = 1
D) a.b = 1 A) a .b = 2

2. A = {–1, 0, 1} olmak üzere

$f: A \to A$

biçiminde tanımlı f fonksiyonunda her $x \in A$ için

$f(x) = f(x^2)$

eşitliği sağlanmaktadır.

Buna göre, bu koşullara uyan kaç farklı f fonksiyonu yazılabilir?

A) 27 B) 24 C) 12 D) 9 E) 6

3. $f(x) = |x+1| + |x+7|$

fonksiyonu veriliyor.

Her x gerçel sayısı için

$f(k-x) - f(k+x) = 0$

eşitliği sağlandığına göre, k kaçtır?

A) –7 B) –4 C) –1 D) 0 E) 4

1) B 2) D 3) B

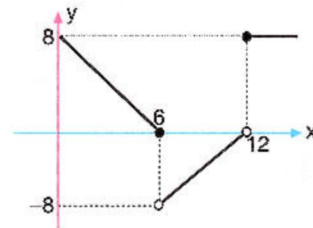
4. $f(x) = \begin{cases} f(x+1) & x < 0 \\ f(x+5) & 0 \le x < 2 \\ x^2 - 3x & 2 < x \end{cases}$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, f(f(–5)) ifadesinin değeri kaçtır?

A) 70 B) 40 C) 30 D) 10 E) 5

5.



Yukarıda y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre,

f(1) + f(2) + ... + f(20)

toplamının değeri kaçtır?

A) $\dfrac{160}{3}$ B) $\dfrac{145}{2}$ C) 72 D) 60 E) 48

6. f ve g bire bir ve örten birer fonksiyon olmak üzere,

$f^{-1}(\ln(x-2)) = g(2x-4)$

olduğuna göre, (fog)(x) neye eşittir?

A) $\ln x + 2$ B) $\dfrac{\ln x}{2}$ C) $\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$
D) e^{2x-4} E) $2e^x$

4) A 5) C 6) C

APOTEMI

MARATON TESTİ - 7

1. $x \in (-\infty, 5]$ olmak üzere,

$f(x) = x^2 - 10x - 8$

fonksiyonu tanımlanıyor.

$f^{-1}(a) = |f^{-1}(a)| - 2$

olduğuna göre, a kaçtır?

A) 4 B) 3 C) –1 D) –2 E) –3

2. f: R → R olmak üzere f fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & |x| \le 2 \\ 7 & |x| > 2 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanıyor.

Buna göre,

I. f fonksiyonu bire birdir.

II. f fonksiyonunun görüntü kümesi [3, 7] dir.

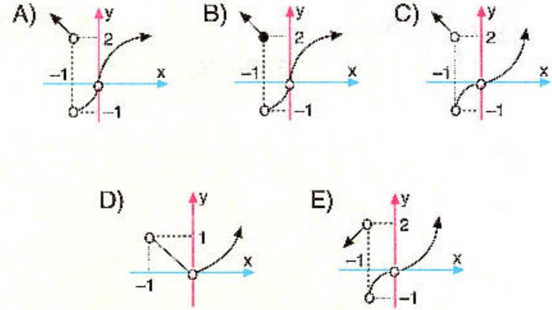
III. f fonksiyonu çift fonksiyondur.

ifadelerinden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) Yalnız III
D) I ve II E) II ve III

3. $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{|x+1|} & x < -1 \\ \dfrac{x^3}{|x|} & x > -1 \end{cases}$$

fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



4. Gerçel sayılarda tanımlı f fonksiyonu için

- $f(x) + f(-x) = 0$
- $f(x) - f(x - 2) = 4$

eşitlikleri geçerli olduğuna göre,

$f(1) + f(2) + ... + f(10)$

toplamının değeri kaçtır?

A) 110 B) 80 C) 72 D) 40 E) 0

1) B 2) E 3) C 4) A

5. Gerçel değerli ve gerçel değişkenli

$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$, $g(x) = \sqrt{x-1}$

fonksiyonları veriliyor.

Buna göre, fog bileşke fonksiyonunun en geniş tanım kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(1, \infty) - \{2, 5\}$
B) $(1, \infty) - \{5\}$
C) $R - \{1, 5\}$
D) $R - \{2, 3\}$
E) $R - \{5\}$

6. $f: [a, \infty) \to [a - 2, \infty)$ olmak üzere,

$f(x) = x^2 - ax$

fonksiyonu veriliyor.

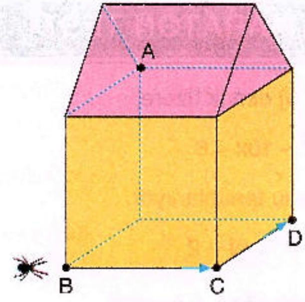
$f^{-1}(4a) = 2a$

olduğuna göre, f fonksiyonunun tersi f^{-1} fonksiyonu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $\sqrt{x-4}$
B) $\sqrt{x}$
C) $\sqrt{x+1}$
D) $1 + \sqrt{x+1}$
E) $1 + \sqrt{-x-1}$

5) B 6) D

7.



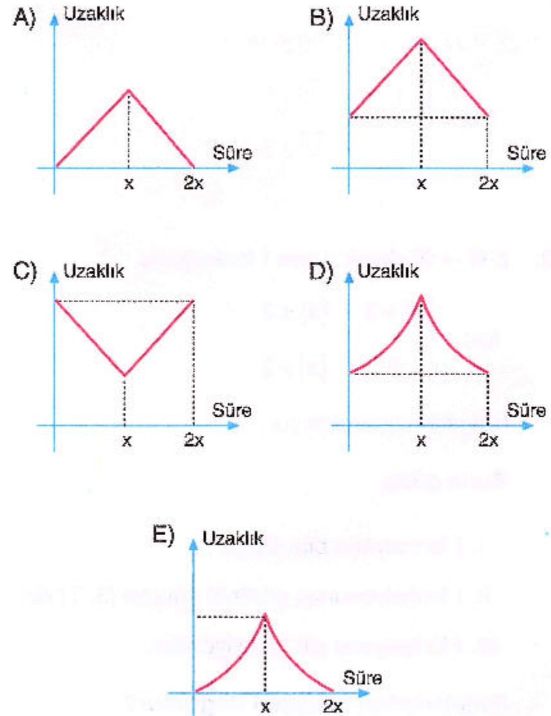
Çatısı altında yer alan bölümü küp şeklinde olan bir binada B köşesinde bulunan bir örümcek şekildeki mavi çizgi ile gösterilen yolda sabit hızla ilerleyerek önce C köşesine sonra D köşesine ulaşmıştır.

x geçen süreyi göstermek üzere,

f : x → "Örümceğin A noktasına olan uzaklığı"

biçiminde bir f fonksiyonu tanımlanıyor.

Buna göre, f in grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



7) D

APOTEMİ

MARATON TESTİ - 8

1. Reel sayılarda tanımlı bir f fonksiyonu her x, y ∈ R için

f(x.y) = f(x) + f(y) şartını sağlamaktadır.

Buna göre, $f(x^{99})$ un f(x) türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) f(x) B) f(98x) C) 99.f(x) D) f(x) + 99 E) $f^{99}(x)$

2. x, 1 den büyük bir tam sayı olmak üzere, x in kendisinden farklı en büyük böleni ☒ ile gösteriliyor.

x ∈ {2, 3, 4, ...} olmak üzere

$$f(x)=\begin{cases}1 & \boxed{x}<5\\ -1 & \boxed{x}\geq 5\end{cases}$$

biçiminde tanımlanıyor.

Buna göre,

f(10) + f(11) + f(12) + ... + f(20)

toplamı kaçtır?

A) 1 B) –1 C) –2 D) –3 E) –4

3. x ve y gerçel sayılar olmak üzere,

f(x) = 2x

fonksiyonunun $x^2 + y^2 \leq 5$ bölgesinde alabileceği en küçük değer kaçtır?

A) –1 B) –2 C) –3 D) –4 E) –5

1) C 2) D 3) B

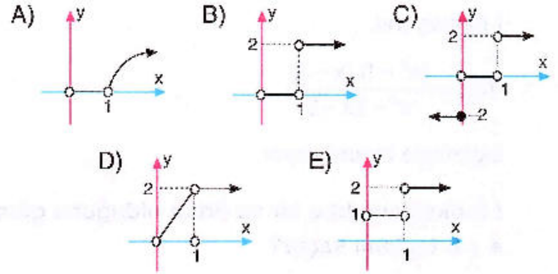
4. |x + 5| – |x – 3| = m

denkleminin çözüm kümesinin en az 1 elemanlı olduğu bilindiğine göre, m in kaç farklı tam sayı değeri vardır?

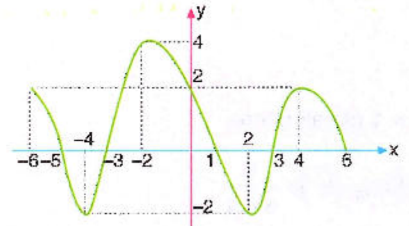
A) 8 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18

5. $f(x)=1+\dfrac{\ln x}{|\ln x|}$

fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



6.



Yukarda [–6, 6] aralığında tanmlanan y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmitir.

Buna göre, ||f(x) – 1| – 1| = 1 denklemini sağlayan kaç farklı x değeri vardır?

A) 12 B) 11 C) 9 D) 5 E) 3

4) D 5) B 6) B

MARATON TESTİ - 9

1. $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x - 7}$

fonksiyonunun tanım kümesi K, görüntü kümesi M olduğuna göre, K ∩ M kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $[-1, 7]$ B) $[0, \infty)$ C) $[7, \infty)$

D) $\mathbb{R} - (-1, 7)$ E) $\{-1, 7\}$

2. $f: A \to \mathbb{R} - \{a, b\}$ olmak üzere,

f fonksiyonu

$$f(x) = \frac{(x^2-1).(x-3)}{x^2-2x-3}$$

biçiminde tanımlanıyor.

f fonksiyonu bire bir ve örten olduğuna göre, a + b toplamı kaçtır?

A) –2 B) –1 C) 0 D) 2 E) 3

3. $a > 1$ olmak üzere,

$$f\left(\log_a \sqrt{x}\right) = \frac{x}{x+a}$$

olduğuna göre,

$f(-4) + f(-3) + f(-2) + ... + f(5)$

toplamının değeri kaçtır?

A) $\frac{1}{55}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{4}{5}$ D) 5 E) 10

4. $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \geq 2 \\ x^2 + 4, & x < 2 \end{cases}$

fonksiyonu veriliyor.

Her $x \in (0, 4]$ için

$$\frac{f(x+3)}{f(-x-1)-5}$$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

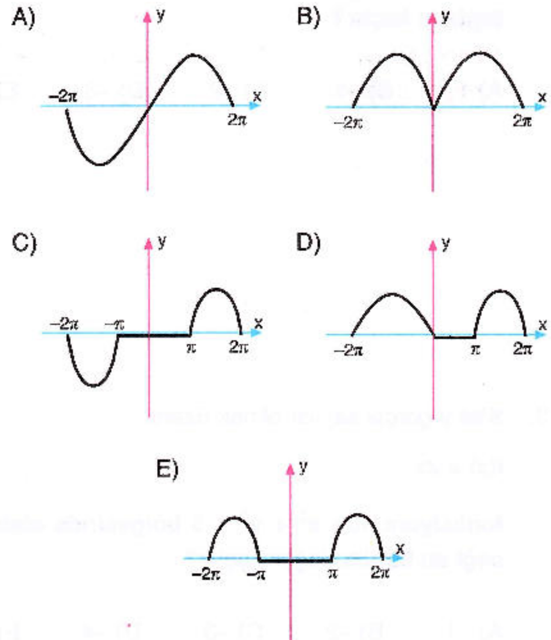
A) $\frac{1}{x+2}$ B) $\frac{x}{x+1}$ C) $\frac{x+3}{x}$

D) $\frac{x+2}{x}$ E) $x^2 + 1$

5. $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ olmak üzere,

$f(x) = |\sin x| - \sin x$

fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



1) C	2) C	3) D	4) C	5) D

APOTEMİ

MARATON TESTİ - 10

1. $A = \{-1, 0, 1\}$ kümesi veriliyor.

$B \subset A$ olmak üzere,

$f: B \to A$

biçiminde tanımlı kaç farklı f tek fonksiyonu yazılabilir?

A) 32 B) 23 C) 15 D) 8 E) 7

2. Gerçel sayılarda tanımlı f fonksiyonu

- $a \neq b$ olmak üzere
  Her $a, b \in R$ için $f(a) \neq f(b)$
- $a < b$ olmak üzere
  Her $a, b \in R$ için $f(a) < f(b)$

koşulları sağlanmaktadır.

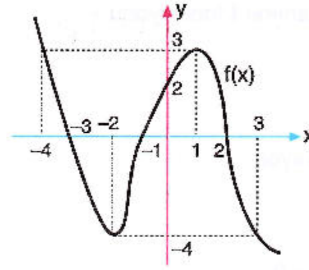
Buna göre, f fonksiyonu aşağıdakilerden hangisi olamaz?

A) $f(x) = 1 - 2^{-x}$ B) $f(x) = \frac{x+1}{2}$

C) $f(x) = e^x - 1$ D) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

E) $f(x) = x^3 + 1$

3.



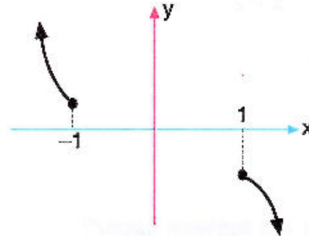
Yukarıda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, $(fof)(x) = 3$ eşitliğini sağlayan kaç farklı x değeri vardır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

4. $f(x) = \begin{cases} |g(x)| & x \leq -1 \\ g(x) & -1 < x < 1 \\ g(-x) & x \geq 1 \end{cases}$

biçiminde tanımlı f fonksiyonunun (–1, 1) aralığı dışındaki grafiği aşağıdaki gibidir.



Buna göre, g(x) aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{x}$ B) x^2 C) x^3 D) $x^3 - x$ E) 2^x

1) E 2) D 3) D 4) C

5. Gerçel sayılarda tanımlı f fonksiyonu

$$f(x)=\frac{1-2^x}{1+2^x}$$

biçiminde tanımlanıyor.

Buna göre,

I. $x<0$ için $f(x)>0$

II. f tek fonksiyondur.

III. $x_1<x_2$ ise $f(x_1)<f(x_2)$

ifadelerinden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve II D) II ve III E) I, II ve III

6. f: R → R olmak üzere,

$$f(x-1)=\begin{cases}2x-1 & x\geq 2\\ x+1 & x<2\end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor.

f(a) = 2

f(b) = 5

olduğuna göre, a + b toplamı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

5) C 6) B

7. Bir öğrenci fonksiyonların bire bir olması ile ilgili aşağıdaki fonksiyonu örnek verip, bu fonksiyonun bire bir olduğunu kanıtlamaya çalışmıştır.

Öğrenci:

$f:Z\rightarrow R$

$$f(x)=\frac{x}{x^2+1}$$

fonksiyonu bire birdir.

İspat:

x, y ∈ Z ve f(x) = f(y) olsun.

I. adım: $\frac{x}{x^2+1}=\frac{y}{y^2+1}$

II. adım: $\frac{x}{x^2+1}-\frac{y}{y^2+1}=0$

III. adım: $\frac{xy^2+x-x^2y-y}{(x^2+1)\cdot(y^2+1)}=0$

IV. adım: $xy(y-x)-(y-x)=0$

V. adım: $(y-x)\cdot(xy-1)=0$, $(xy-1)\neq 0$

$y-x=0\Rightarrow y=x$

O halde f(x) bire bir fonksiyondur.

Buna göre, öğrenci hangi adımda hata yapmıştır?

A) I. B) II. C) III. D) IV. E) V.

8. f : {1, 2, 3, 4, 5} → {0, 1}

olmak üzere,

f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) = 2

eşitliğini sağlayan kaç farklı f fonksiyonu tanımlanabilir?

A) 60 B) 50 C) 30 D) 10 E) 5

7) E 8) D

APOIEMI